

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 1

Definition 1.1: Gruppen/Körper/Vektorräume (lineare Räume)

- (a) Ein Tupel $(M, *)$ mit einer nichtleeren Menge M , auf der eine Abbildung $*$: $M \times M \longrightarrow M$, $(m, n) \mapsto m * n$, definiert ist, heißt **Gruppe**, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (i) $\forall k, l, m \in M : k * (l * m) = (k * l) * m$ (Assoziativität)
- (ii) $\exists m_0 \forall m \in M : m * m_0 = m = m_0 * m$ (Existenz eines neutralen Elementes)
- (iii) $\forall m \in M \exists n \in M : m * n = m_0 = n * m$ (Existenz von Inversen)

Wir sprechen von einer **kommutativen** oder **abelschen** Gruppe, falls zusätzlich gilt:

- (iv) $\forall k, l \in M : k * l = l * k$ (Kommutativität)
- (b) Ein **Körper** ist ein Tripel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge $\mathbb{K}$, auf der zwei assoziative Verknüpfungen $+$: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(k_1, k_2) \mapsto k_1 + k_2$ und $\cdot$: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(k_1, k_2) \mapsto k_1 \cdot k_2$ so definiert sind, dass
- (1) $(\mathbb{K}, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e_+ ist,
 - (2) $(\mathbb{K} \setminus e_+, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist und zusätzlich
 - (3) $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ erfüllt wird. (Distributivität)

Falls klar ist, welche Operationen gemeint sind, schreiben wir einfach $\mathbb{K}$. Der Einfachheit halber sei im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit den üblichen Operationen.

- (c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Menge X zusammen mit einer Verknüpfung $+$: $X \times X \rightarrow X$, genannt die Addition auf X , und einer (äußeren) Operation $\cdot$: $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$, genannt skalare Multiplikation, heißt ein **$\mathbb{K}$ -Vektorraum** oder ein **linearer Raum über $\mathbb{K}$** , falls gilt:
- (i) $(X, +)$ ist eine abelsche Gruppe und
 - (ii) für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$ gilt

$$1_{\mathbb{K}} \cdot x = x, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \quad (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x).$$

Definition 1.2: topologische, Hausdorffsche, metrische, normierte und Euklidische Räume

- (a) Sei $M \neq \emptyset$. Ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt **Topologie** auf M , falls:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $M \in \mathcal{T}$
- Beliebige Vereinigungen sowie endliche Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{T}$ liegen in $\mathcal{T}$.

Das Paar (M, T) nennt man einen **topologischen Raum** und die Elemente von T **offen**.

- (b) Ein topologischer Raum (M, T) heißt **Hausdorff-Raum**, wenn er das **Hausdorffsche Trennungsaxiom** erfüllt, d.h., wenn zu je zwei (verschiedenen) Punkten $x, y \in M$ offene Mengen (sogenannte offene Umgebungen) $U, V \in T$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ existieren.
- (c) Sei $M \neq \emptyset$ beliebig. Eine Abbildung d : $M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf M , falls gilt

- (i) $\forall x, y \in M : d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit),
- (ii) $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
- (iii) $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Ist d eine Metrik auf M , so heißt das Paar (M, d) **metrischer Raum**. Für je zwei Elemente $x, y \in M$ heißt die Zahl $d(x, y)$ der *Abstand* oder die *Distanz* von x und y .

- (d) Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty[$ heißt eine **Norm** auf X , wenn für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende drei Eigenschaften¹ erfüllt sind:

- (i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit),
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Homogenität),
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Ein Vektorraum X , versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$, heißt ein **normierter Raum** $(X, \|\cdot\|)$.

- (e) Auf einem reellen Vektorraum X heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ **Skalarprodukt**, falls für alle $x, y, z \in X$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie)
- (ii) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ (Bilinearität)
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (Positiv-Definitheit)

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X , nennen wir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen **Euklidischen $\mathbb{R}$ -Vektorraum**.

Definition 1.3: Offene Kugeln in metrischen Räumen

- (a) In einem metrischen Raum (M, d) nennen wir eine Menge $U \subset M$ genau dann **offen**, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ um x von Radius ε bezüglich der Metrik d vollständig in U enthalten ist; mit anderen Worten, wenn

$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subset U, \quad \text{wobei} \quad B_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

- (b) Unter der **Einheitskugel** eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ versteht man die bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik offene Kugel um den Ursprung von Radius 1, d.h. die Menge

$$B_1^{\|\cdot\|}(0) := \{x \in X \mid d_{\|\cdot\|}(0, x) < 1\} = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}.$$

Zusatzaufgabe 1.1: (Topologische Räume & Hausdorffsches Trennungsaxiom)

- (a) Zeigen Sie, dass $\{\emptyset, \{u\}, X\}$ eine nicht-Hausdorffsche Topologie auf $X := \{u, v, w\}$ definiert.
- (b) Geben Sie alle Topologien von $M = \{a, b\}$ an. Welche davon sind Hausdorffsch?
- (c) Auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten wir das Mengensystem $\mathcal{T}$, welches neben $\emptyset$ und $\mathbb{N}$ genau die Teilmengen $U \subset \mathbb{N}$ enthält, deren Komplement $\mathbb{N} \setminus U$ endlich ist. Zeigen Sie:
 - (i) $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum.
 - (ii) Das Hausdorffsche Trennungsaxiom gilt nicht in $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.1:

- (a) Nachzuprüfen ist, dass neben $\emptyset$ und X auch jeder endliche Schnitt und jede beliebige Vereinigung von Elementen aus $\{\emptyset, \{u\}, X\}$ wieder in $\{\emptyset, \{u\}, X\}$ liegen. Dies ist offensichtlich der Fall, da wegen $\emptyset \subset \{u\} \subset X$ jeder Schnitt und jede Vereinigung genau einer dieser Mengen ergibt. Jedoch besitzt beispielsweise der Punkt w nur die offene Umgebung $X = \{u, v, w\}$ und damit keine Umgebung, die nicht auch u oder v enthalten würde. Somit ist das Hausdorffsche Trennungsaxiom nicht erfüllt.
- (b) $T_1 = \{\emptyset, M\}$, $T_2 = \{\emptyset, \{a\}, M\}$, $T_3 = \{\emptyset, \{b\}, M\}$, $T_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\} = \mathcal{P}(M)$ sind genau alle Topologien auf $M = \{a, b\}$.

¹Sind nur die Eigenschaften (ii) und (iii) erfüllt, reden wir von einer **Halbnorm**.

- (c) (i) Wegen $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$ ist nur zu zeigen, dass endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$ liegen. Wegen $\emptyset \cap U = \emptyset \in \mathcal{T}$ und $\emptyset \cup U = U \in \mathcal{T}$ für beliebiges $U \in \mathcal{T}$, genügt es nur nichtleere Mengen zu betrachten:
- Seien nun $U, V \in \mathcal{T}$. Dann sind $\mathbb{N} \setminus U$ und $\mathbb{N} \setminus V$ endliche Mengen, genauso wie ihre Vereinigung $(\mathbb{N} \setminus U) \cup (\mathbb{N} \setminus V) = \mathbb{N} \setminus (U \cap V)$. Somit ist auch $(U \cap V) \in \mathcal{T}$.
 - Sei nun $A = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine beliebige Vereinigung von $U_i \in \mathcal{T}$. Dann gilt für ein beliebiges $U_i \neq \emptyset$ offenbar $U_i \subset A \subset \mathbb{N}$ und daher auch $(\mathbb{N} \setminus A) \subset (\mathbb{N} \setminus U_i)$. Da nach Voraussetzung $U_i \in \mathcal{T}$ und somit $\mathbb{N} \setminus U_i$ endlich ist, muss auch $\mathbb{N} \setminus A$ endlich sein, also gilt $A \in \mathcal{T}$.
- (ii) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $U, V \in \mathcal{T}$ derart, dass $m \in U$ und $n \in V$. Dann gilt insbesondere $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$. Angenommen, es gelte $U \cap V = \emptyset$. Wegen $U, V \subset \mathbb{N}$ folgte dann $V \subset (\mathbb{N} \setminus U)$. Da jedoch $\mathbb{N} \setminus U$ nach Voraussetzung endlich ist, müsste dann auch V endlich sein. Wegen $V \in \mathcal{T}$ ist aber auch $\mathbb{N} \setminus V$ endlich, also folgte $V \cup (\mathbb{N} \setminus V) = \mathbb{N}$ endlich, Widerspruch. Somit kann nicht $U \cap V = \emptyset$ gegolten haben, weswegen das Hausdorffsche Trennungsaxiom nicht erfüllt ist.

Zusatzaufgabe 1.2:

- (a) Zeigen Sie, dass die Nichtnegativität einer Norm bzw. einer Metrik nicht explizit gefordert werden muss, sondern sich aus den übrigen Eigenschaften einer Norm bzw. Metrik ergibt.
- (b) Geben Sie alle Normen auf $\mathbb{R}$ an und beweisen Sie, dass Sie wirklich alle gefunden haben.
- (c) Geben Sie jeweils einen Vektorraum von endlicher ($n \geq 2$) und unendlicher Dimension an.
- (d) Kennen Sie auf diesen Räumen bereits Normen?

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.2:

- (a) • $\forall x \in X : 0 = 0\|0\| = \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \implies \|x\| \geq 0$
 • $\forall x, y \in M : 0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \implies d(x, y) \geq 0$
- (b) Jede Norm auf $\mathbb{R}$ besitzt die Gestalt $\|x\| = c|x|$ mit einer Konstanten $c > 0$ (genauer $c = \|1\|$), was unmittelbar aus der Gleichung $\|x\| = |x|\|1\|$ folgt.
- (c) • Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wird $X = \mathbb{R}^n$ mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation (d.h., für zwei Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ in X sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ seien $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ und $\lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$) zum reellen Vektorraum.
 • Ebenso ist $C([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
- (d) • Häufig verwendete Normen auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind zum Beispiel

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \left(\text{2-Norm mit dem Euklidischen Skalarprodukt } \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \right),$$

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{1-Norm}), \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \quad (\text{Maximumsnorm}),$$

wobei die 1-Norm und die 2-Norm Spezialfälle der für reellwertiges $p \in [1, \infty[$ gegebenen p -Norm

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

sind. Die Dreiecksungleichung bezeichnet man in diesem Fall als **Minkowski-Ungleichung**

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Beweisen kann man sie für $p \in]1, \infty[$ (vgl. Forster I, §16) mittels der **Hölder-Ungleichung**

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \left(\text{wobei } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right),$$

die zudem für $p = 2$ die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung** $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$ liefert.

- Auf dem Vektorraum $C([a, b], \mathbb{R}) := \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$ kennen wir die Normen
 - (i) $\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ (existiert, da $|f|$ stetig, $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt)
 - (ii) $\|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}} := \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$ ($= \sqrt{\langle x, x \rangle}$ mit $\langle f, g \rangle_{C([a, b])} := \int_a^b (fg)(x) dx$)
- Bem.:** Im Fall $\|f_n - f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ heißt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **im quadratischen Mittel konvergent**.

Zusatzaufgabe 1.3:

(Hierarchie der Räume)

- (a) Warum ist jeder mit einem Innenprodukt versehene Raum auch ein normierter Raum ?
- (b) Warum ist jeder normierte Raum auch ein metrischer Raum ?
- (c) Warum ist jeder metrische Raum ein topologischer Raum ?
- (d) Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum (M, d) das Hausdorffsche Trennungssaxiom erfüllt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.3:

- (a) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Innenprodukt (Skalarprodukt), dann wird durch $\|x\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm $\|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle}: X \rightarrow \mathbb{R}$ induziert, also ist $(X, \|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ ein normierter Raum.
Bew: Definitheit und Homogenität sind klar, und die Dreiecksungleichung folgt mittel CSU aus

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \quad .$$

- (b) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so wird durch $d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik $d_{\|\cdot\|}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ induziert, also ist $(X, d_{\|\cdot\|})$ ein metrischer Raum.
- (c) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Die Menge T_d aller offenen Teilmengen eines metrischen Raumes (M, d) ist eine (die von der Metrik d induzierte) **Topologie** auf M , wonach (M, T_d) ein topologischer Raum ist.

Bew:

- (i) $\emptyset$ und X sind offen (folgt direkt aus der Definition).
- (ii) Sind U und V offen, so auch $U \cap V$:
 Sei $x \in U \cap V$, dann gibt es aufgrund der Offenheit von U, V Radien $r_1, r_2 > 0$ mit $B_{r_1}(x) \subset U$, $B_{r_2}(x) \subset V$. Also gilt mit $r := \min(r_1, r_2)$ auch $B_r(x) \subset U \cap V$. Somit ist $U \cap V$ offen.
- (iii) Sind die Mengen U_i ($i \in I$) offen, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen:
 Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, dann gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$, und da U_i offen ist auch ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subset U_i$. Wegen $U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ folgt dann aber auch $B_r(x) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Somit ist die Menge $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Achtung: Nicht jede Topologie wird durch eine Metrik induziert.

- (d) Seien $x \neq y$ aus M . Aufgrund der Definitheit gilt dann $d(x, y) = \delta > 0$. Betrachte nun für $\varepsilon := \frac{\delta}{3}$ die offenen ε -Kugeln

$$B_\varepsilon(x) = \{z \in M : d(x, z) < \varepsilon\}, \quad B_\varepsilon(y) = \{z \in M : d(y, z) < \varepsilon\}.$$

Dann gilt $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$. Wäre nämlich $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$, so folgte nach Dreiecksungleichung $\delta = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3}$, Widerspruch. Somit existieren zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in M$ disjunkte offene $U, V \subset M$ mit $x \in U$ und $y \in V$.

Zusatzaufgabe 1.4:

- (a) Wie sieht $B_1^{d_*}((0,0))$ in $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Metrik $d_*(x,y) := \|x-y\|_*$ für $*$ $\in \{1, 2, \infty\}$ aus?
- (b) Seien (M, d_1) und (M, d_2) metrische Räume. Beweisen oder widerlegen Sie:
Mit $d_3 := d_1 + d_2$ und $d_4 := \max(d_1, d_2)$ sind auch (M, d_3) und (M, d_4) metrische Räume.
- (c) Wird durch $d(x,y) := \arctan(|x-y|)$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird?
- (d) Welche der Abbildungen $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definieren eine Metrik auf X ?
- (i) $d(x,y) := e^{x-y} - 1$ auf $X = \mathbb{R}$ (ii) $d(x,y) := \sin(\|x-y\|_2)$ auf $X = \mathbb{R}^2$
- (iii) $d(x,y) := |S(x) - S(y)|$ mit $S(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ auf $X = \mathbb{R}$
- (iv) $d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y} & \text{für } x \neq y \end{cases}$ auf $X = \mathbb{N}$

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.4:

- (a) (i) Raute $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| < 1\}$;
(ii) Einheitskreis $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.
(iii) Quadrat $] -1, 1[\times] -1, 1[:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}$;
- (b) Die Räume (M, d_3) und (M, d_4) sind metrische Räume, denn d_3 und d_4 erfüllen die Eigenschaften einer Metrik:

- Die Definitheit ist jeweils erfüllt:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in M : d_3(x, y) = 0 & \iff d_1(x, y) + d_2(x, y) = 0 \\ & \iff d_1(x, y) = 0 \wedge d_2(x, y) = 0 \iff x = y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in M : d_4(x, y) = 0 & \iff \max(d_1(x, y), d_2(x, y)) = 0 \\ & \iff d_1(x, y) = 0 \wedge d_2(x, y) = 0 \iff x = y. \end{aligned}$$

- Die Symmetrie ist jeweils erfüllt

$$\forall x, y \in M : d_3(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) = d_1(y, x) + d_2(y, x) = d_3(y, x).$$

$$\forall x, y \in M : d_4(x, y) = \max(d_1(x, y), d_2(x, y)) = \max(d_1(y, x), d_2(y, x)) = d_4(y, x).$$

- Die Dreiecksungleichung ist jeweils erfüllt

$$\begin{aligned} d_3(x, y) &= d_1(x, y) + d_2(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y) + d_2(x, z) + d_2(z, y) \\ &= d_1(x, z) + d_2(x, z) + d_1(z, y) + d_2(z, y) \\ &= d_3(x, z) + d_3(z, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4(x, y) &= \max(d_1(x, y), d_2(x, y)) \\ &= \begin{cases} d_1(x, y) & \text{falls } d_1(x, y) \geq d_2(x, y) \\ d_2(x, y) & \text{falls } d_1(x, y) < d_2(x, y) \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} d_1(x, z) + d_1(z, y) & \text{falls } d_1(x, y) \geq d_2(x, y) \\ d_2(x, z) + d_2(z, y) & \text{falls } d_1(x, y) < d_2(x, y) \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \max(d_1(x, z), d_2(x, y)) + \max(d_1(z, y), d_2(z, y)) & \text{falls } d_1(x, y) \geq d_2(x, y) \\ \max(d_1(x, z), d_2(x, y)) + \max(d_1(z, y), d_2(z, y)) & \text{falls } d_1(x, y) < d_2(x, y) \end{cases} \\ &= \max(d_1(x, z), d_2(x, y)) + \max(d_1(z, y), d_2(z, y)) \\ &= d_4(x, z) + d_4(z, y). \end{aligned}$$

- (c) Wegen $\arctan(0) = 0$ und $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wissen wir, dass $\arctan$ auf $\mathbb{R}^+$ positiv und streng monoton wachsend ist. Weiter ist $\arctan$ stetig und auf $\mathbb{R}_0^+$ sublinear, d.h. für alle $a, b \geq 0$ gilt $\arctan(a+b) \leq \arctan a + \arctan b$. Die Sublinearität folgt dabei aus der Abschätzung

$$\arctan(a+b) - \arctan(a) = \int_0^b \frac{1}{(a+x)^2+1} dx \leq \int_0^b \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(b)$$

unter Ausnutzung der Monotonie des Integrals. Dies impliziert, dass $\arctan(|x-y|)$ eine Metrik ist, denn:

- $\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) = 0 \iff \arctan(|x-y|) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y.$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) = \arctan(|x-y|) = \arctan(|y-x|) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned} d(x, y) = \arctan(|x-y|) &\leq \arctan(|x-z| + |z-y|) \\ &\leq \arctan(|x-z|) + \arctan(|z-y|) = d(x, z) + d(z, y) . \end{aligned}$$

- (d) (i) Es handelt sich nicht um eine Metrik, da im Allgemeinen $e^x \neq e^{-x}$ und daher für $x \neq y$ somit $d(x, y) = e^{x-y} - 1 = e^{-(y-x)} - 1 \neq e^{y-x} - 1 = d(y, x)$, also die Symmetrie nicht gegeben ist.
- (ii) Hier liegt keine Metrik vor, da beispielsweise für Vektoren $(3n\pi, 0)^T = x \neq y = (0, 4n\pi)^T$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$d(x, y) = \sin \left(\left\| \begin{pmatrix} 3n\pi \\ -4n\pi \end{pmatrix} \right\|_2 \right) = \sin \left(\sqrt{9n^2\pi^2 + 16n^2\pi^2} \right) = \sin(5n\pi) = 0$$

gilt, was der Definitheit einer Metrik widerspräche.

- (iii) Da die stetige Funktion $S(x)$ wegen $S'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} > 0$ streng monoton wachsend ist, folgt sofort auch die Injektivität von $S(x)$, was die Definitheit

$$0 = d(x, y) \iff 0 = |S(x) - S(y)| \iff 0 = S(x) - S(y) \iff S(x) = S(y) \iff x = y$$

liefert. Die Symmetrie ist offensichtlich und die Dreiecksungleichung ergibt sich wegen

$$d(x, z) = |S(x) - S(z)| \leq |S(x) - S(y)| + |S(y) - S(z)| = d(x, y) + d(y, z) ,$$

so dass es sich hier tatsächlich um eine Metrik handelt.

- (iv) Es handelt es sich um eine Metrik, denn sowohl die Definitheit als auch die Symmetrie sind offenbar erfüllt. Für beliebige, paarweise verschiedene (sonst ist nichts zu zeigen) $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt darüberhinaus

$$d(x, z) = 1 + \frac{1}{x+z} \leq 1 + 1 \leq 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} = d(x, y) + d(y, z) .$$

Zusatzaufgabe 1.5:

- (a) Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $d_{\text{disk}}: M \times M \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \begin{cases} 0 & u = v , \\ 1 & u \neq v . \end{cases}$
- (i) Zeigen Sie, dass d_{disk} eine Metrik auf M ist. Diese wird **diskrete Metrik** genannt.
- (ii) Wie sieht die von der diskreten Metrik erzeugte (sog. **diskrete**) Topologie $T_{d_{\text{disk}}}$ aus ?
- (iii) Für welche M stimmt die diskrete Topologie $T_{d_{\text{disk}}}$ mit der indiskreten Topologie $\{\emptyset, M\}$ überein?

- (b) Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit $|M| = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
Die Topologie ist genau dann von einer Metrik induziert, wenn $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$ gilt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.5:

- (a) (i) Offenbar gilt $d_{\text{disk}}(u, v) \geq 0$ und $d_{\text{disk}}(u, v) = 0 \iff u = v$ (Definitheit erfüllt). Aufgrund der Symmetrie der Relationen $=$ und $\neq$ folgt auch die Symmetrie $d_{\text{disk}}(u, v) = d_{\text{disk}}(v, u)$. Eine Fallunterscheidung liefert nun auch die Gültigkeit der Dreiecksungleichung.
- (ii) Es ist $T_{d_{\text{disk}}} = \mathcal{P}(M)$, denn einerseits ist $\emptyset \in T_{d_{\text{disk}}}$ (da eine Topologie sowohl $\emptyset$ als auch M als Elemente enthalten muss) und andererseits stimmen die als offene Mengen in $T_{d_{\text{disk}}}$ enthaltenen offenen ε -Kugeln $B_\varepsilon(u) := \{v \in M \mid d_{\text{disk}}(u, v) < \varepsilon\}$ für $\varepsilon \leq 1$ genau mit den einelementigen Mengen $\{u\}$ überein und jede beliebige nichtleere Teilmenge A von M lässt sich darstellen als

$$A = \bigcup_{u \in A} \{u\}.$$

- (iii) Damit $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, M\}$ gelten kann, muss M genau ein Element besitzen.

- (b) „ $\implies$ “ Sei nun $\mathcal{T}$ von einer Metrik erzeugt (enthalte als Elemente also genau die bezüglich einer Metrik $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ offenen Mengen). Wir zeigen nun, dass jede beliebige Einpunktmenge in $\mathcal{T}$ und somit – da beliebige Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$ liegen müssen (Eigenschaft einer Topologie) – auch jede beliebige Teilmenge von M in $\mathcal{T}$ liegt (also $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$ gilt).

Sei nun $m \in M$ ein beliebiges Element. Dann folgt aus der Definitheit der Metrik, dass ein $\rho > 0$ mit $\rho := \min\{d(m, \tilde{m}) \mid \tilde{m} \in M \setminus \{m\}\}$ existiert. Da demnach jedes von m verschiedene Element mindestens den Abstand $\rho > 0$ von m besitzt, stimmt die offene Kugel

$$B_{\frac{\rho}{2}}(m) := \left\{x \in M \mid d(x, m) < \frac{\rho}{2}\right\}$$

mit der Einpunktmenge $\{m\}$ überein. Als offene Kugel ist $\{m\}$ dann ein Element von $\mathcal{T}$, wie behauptet.

„ $\impliedby$ “ Gelte nun $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$. In Aufgabenteil (a) haben wir bereits gesehen, dass $\mathcal{T}$ dann beispielsweise genau alle bezüglich der diskreten Metrik offenen Mengen von M enthält, demnach also mit der von der diskreten Metrik erzeugten Topologie übereinstimmt. (Dies gilt sogar unabhängig davon, ob die Menge M endlich viele Elemente besitzt, oder nicht).

Zusatzaufgabe 1.6:

- (a) Zeigen Sie, dass $\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ eine Norm auf $C([a, b], \mathbb{R})$ ist.
- (b) Zeigen Sie: $\|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}}$ ist eine Norm und es gilt $\forall f \in C([a, b], \mathbb{R}) : \|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}} \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_\infty$.
- (c) Begründen Sie, warum die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge f_n aus $C([a, b], \mathbb{R})$ die Konvergenz im quadratischen Mittel nach sich zieht.
- (d) Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche im quadratischen Mittel aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Lösung zu Zusatzaufgabe 1.6:

- (a) Zunächst einmal ist die Norm wohldefiniert, da jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall ihre globalen Extrema annimmt (Satz vom Minimum/Maximum) und $|\cdot| \circ f$ stetig ist, falls f stetig ist.

- Da nach Definition des Maximums für alle $x \in [a, b]$ stets $0 \leq |f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ gilt, folgt die Definitheit wegen

$$\|f\|_\infty = 0 \iff \forall x \in [a, b] : |f(x)| = 0 \iff \forall x \in [a, b] : f(x) = 0 \iff f = 0.$$

- Nach Eigenschaften des Maximum und des Betrages gilt für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in C([a, b])$ auch

$$\|\lambda f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |\lambda f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty.$$

- Nach Eigenschaften des Maximum und des Betrages gilt für beliebige $f, g \in C([a, b])$ auch

$$\|f + g\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)|,$$

also erfüllt $\|\cdot\|_\infty$ auch die Dreiecksungleichung $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

- (b) Es genügt zu zeigen, dass $\langle f, g \rangle_{C([a, b])} := \int_a^b f(x)g(x)dx$ auf $C([a, b])$ ein Skalarprodukt ist, denn dann folgt mit Korollar 1.6 bereits, dass $\|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{C([a, b])}}$ eine Norm sein muss. Da sich die Symmetrie aus der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$ und die Bilinearität aus der Linearität des Integrals ergibt, bleibt nur die Definitheit zu überprüfen, d.h., zu zeigen ist, dass

$$\forall f \in C([a, b]): \langle f, f \rangle_{C([a, b])} \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle f, f \rangle_{C([a, b])} = 0 \in \mathbb{R} \iff f = 0 \in C([a, b]).$$

Ersteres ergibt sich aus $0 \leq (f(x))^2$ und der Monotonie des Integrals. Ebenso sieht man, dass $\langle 0, 0 \rangle_{C([a, b])} = 0$. Sei nun $\langle f, f \rangle_{C([a, b])} = 0$ für ein $f \in C([a, b])$. Angenommen, f ist nicht die Nullfunktion, dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $|f(\xi)| = \eta > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f und daher auch von $|f|$ finden wir ein $\delta > 0$, so dass $\forall x \in I := [\xi - \delta, \xi + \delta] \cap [a, b] : |f(x)| \geq \varepsilon := \frac{\eta}{2}$. Wegen $I = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ und da die Länge von I mindestens $\delta > 0$ beträgt (beachte, dass ξ auch am Rand liegen kann), erhalten wir nun mit den Eigenschaften des Integrals den Widerspruch

$$0 = \langle f, f \rangle_{C([a, b])} = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq \int_\alpha^\beta |f(x)|^2 dx \geq \int_\alpha^\beta \varepsilon^2 dx \geq (\beta - \alpha)\varepsilon^2 \geq \delta\varepsilon^2 > 0.$$

Desweiteren ergibt sich aufgrund der Linearität und Monotonie des Integrals

$$\|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}}^2 = \int_a^b (f(x))^2 dx \leq \int_a^b \left(\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \right)^2 dx = \int_a^b \|f\|_\infty^2 dx = (b - a) \cdot \|f\|_\infty^2.$$

Aufgrund der Nichtnegativität liefert Wurzelziehen nun die noch ausstehende Behauptung.

- (c) Gleichmäßige Konvergenz ist gleichbedeutend mit der Konvergenz bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$. Aufgrund der in (b) gezeigten Ungleichung impliziert dies aber auch die Konvergenz bezüglich $\|f\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{C([a, b])}}$, was aber genau der Konvergenz im quadratischen Mittel entspricht.

- (d) Betrachten wir die Funktionenfolge $f_k: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) := \left(\frac{|x - \pi|}{\pi} \right)^k$, so konvergiert sie im quadratischen Mittel gegen die Nullfunktion, denn es gilt

$$\int_0^{2\pi} |f_k(x) - 0|^2 dx = 2 \int_0^\pi \left(\frac{\pi - x}{\pi} \right)^{2k} dx = -\frac{2\pi}{2k+1} \left(\frac{\pi - x}{\pi} \right)^{2k+1} \Big|_0^\pi = \frac{2\pi}{2k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) := \begin{cases} 0 & \text{bei } 0 < x < 2\pi \\ 1 & \text{bei } x = 0 \text{ oder } x = 2\pi \end{cases},$

also konvergiert f_k punktweise gegen die auf der rechten Seite definierte Funktion $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

Jedoch konvergiert f_k nicht gleichmäßig gegen f , denn:

- Variante A: $\sup_{x \in [0, 2\pi]} |f_k(x) - f(x)| = 1$ wegen $\lim_{\substack{x \searrow 0 \\ x \neq 0}} f_k(x) = 1$ und $f(x) = 0$ für $0 < x < 2\pi$,
- Variante B: f müsste als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig sein.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 2

Konvergenz und Vollständigkeit

- (a) In (pseudo-)metrischen Räumen (M, d) bzw. in linearen Räumen, welche mit einer (Halb-)Norm versehen werden, sind die Begriffe **konvergente** / **Cauchy-Folge** analog zum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ definiert.

Bemerkung:

Zwei Metriken d_1, d_2 auf $M \neq \emptyset$ heißen **äquivalent**, wenn sie dieselbe Topologie induzieren.

- (b) Ein metrischer Raum (M, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge aus M in (M, d) konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banach-Raum**. Ein vollständiger Euklidischer Raum heißt **Hilbert-Raum**.

Beispielräume

- **Beispiel 2.2:** Mit jeder Norm sind $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ und $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ Banachräume. Die Vollständigkeit ist eine direkte Folge der Vollständigkeit von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ bzw. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ bzw. der Äquivalenz von Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen.

- **Beispiel 2.3:** Der Raum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\} = \{x = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \xi_k \in \mathbb{R}\}$ aller Folgen in $\mathbb{R}$ ist ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.

- **Beispiel 2.4:** Der Folgenraum $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ist ein Banach-Raum, wobei

$$\ell^p := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.1)$$

- **Beispiel 2.5:** Der Folgenraum $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banach-Raum, wobei $p \in [1, \infty[$ sowie

$$\ell^\infty := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k| < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|. \quad (2.2)$$

- **Corollar 2.7:**

- (a) Für alle $p \in [1, \infty[$ ist ℓ^p ein linearer Unterraum von ℓ^∞ .
(b) Der Folgenraum $(\ell^p, \|\cdot\|_\infty)$ ist unvollständig.

- **Beispiel 2.8:** Der Folgenraum $(c, \|\cdot\|_\infty)$ der konvergenten Folgen ist ein Banach-Raum, wobei c ein linearer UR von ℓ^∞ und

$$c := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists \xi \in \mathbb{K}: \xi_k \rightarrow \xi \right\}. \quad (2.3)$$

- **Beispiel 2.9:** Der Folgenraum $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ der Nullfolgen ist ein Banach-Raum, wobei c_0 ein linearer UR von c und

$$c_0 := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists \xi \in \mathbb{K}: \xi_k \rightarrow 0 \right\}. \quad (2.4)$$

- **Beispiel 2.10:** Der Funktionenraum $(B(T), \|\cdot\|_\infty)$ der beschränkten Funktionen ist ein Banach-Raum, wobei $T \subset M$, (M, d) metrisch sowie

$$B(T) := \left\{ f: T \rightarrow \mathbb{K} \mid \sup_{t \in T} |f(t)| < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty := \sup_{t \in T} |f(t)|. \quad (2.5)$$

- **Beispiel 2.11:** Sei (M, d) metrisch, $T \subset M$ kompakt. Der Funktionenraum $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ der stetigen Funktionen ist ein Banach-Raum, wobei $C(T)$ ein linearer UR von $B(T)$ und

$$C(T) := C_{\mathbb{K}}(T) := \left\{ x: T \rightarrow \mathbb{K} \mid x \text{ stetig} \right\}. \quad (2.6)$$

- **Beispiel 2.12:** Der Funktionenraum $(C^n([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|)$ der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen ist ein Banach-Raum, wobei

$$C^n([a, b], \mathbb{K}) := \left\{ x: [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \mid x \text{ mind. } n\text{-mal stetig differenzierbar} \right\} \quad (2.7)$$

ist und mit der Notation $x^{(0)}(t) = x(t)$ und $x^{(\nu)}(t) = (x^{(\nu-1)}(t))'$ die Norm gegeben ist durch

$$\|x\| := \sum_{\nu=0}^n \|x^{(\nu)}\|_{\infty} = \sum_{\nu=0}^n \max_{t \in [a, b]} |x^{(\nu)}(t)|. \quad (2.8)$$

- **Beispiel 2.13:** Der Funktionenraum $(BV([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_{BV})$ ist ein Banach-Raum, wobei

$$BV([a, b], \mathbb{K}) := \left\{ x: T \rightarrow \mathbb{K} \mid x \text{ von beschränkter Variation, d.h. } V(x) < \infty \right\} \quad (2.9)$$

mit

$$V(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{Z(n)} \sum_{\nu=1}^n |x(t_{\nu}) - x(t_{\nu-1})| \quad \text{und} \quad \|x\|_{BV} := |x(a)| + V(x). \quad (2.10)$$

Allgemeine L^p -Räume

- **Definition 2.14:** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum,² $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ der betrachtete Messraum und $p \in [1, \infty]$. Auf der Menge der messbaren Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

- (a) im Fall $1 \leq p < \infty$ die Zahl $N_p(f)$ durch

$$N_p(f) = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.11)$$

sowie $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ durch

$$\mathcal{L}^p := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\}. \quad (2.12)$$

- (b) im Fall $p = \infty$ die Zahl $N_{\infty}(f)$ durch³

$$N_{\infty}(f) := \inf A_f \quad \text{mit} \quad A_f = \{ \lambda \in [0, \infty] \mid |f| \leq \lambda \text{ } \mu\text{-f.ü.} \} \quad (2.13)$$

sowie $\mathcal{L}^{\infty} := \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ durch

$$\mathcal{L}^{\infty} := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und } N_{\infty}(f) < \infty \right\}. \quad (2.14)$$

- **Corollar 2.16:** Es ist $\mathcal{L}^{\infty}$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$, auf dem durch $\|f\|_{\mathcal{L}^{\infty}} := N_{\infty}(f)$ eine Halbnorm gegeben ist.

- **Lemma 2.17:** Sei $1 < p < \infty$ und $q \in \mathbb{R}$ derart, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. Dann gilt für beliebige messbare Funktionen $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die **Hölder-Ungleichung**

$$N_1(f \cdot g) \leq N_p(f) N_q(g), \quad \text{oder} \quad \int_{\Omega} |f \cdot g| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.15)$$

- **Satz 2.18:** Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für beliebige messbare Funktionen $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die **Minkowski-Ungleichung** $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.

- **Bemerkung 2.19 (f):** Mittels Übergang zu den Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $f \sim g : \iff f = g \text{ } \mu\text{-f.ü.}$ jeweils zum linearen Raum

$$L^p := L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{ [f] \mid f \in \mathcal{L}^p \} \quad (2.16)$$

der Äquivalenzklassen $[f]$ von $f \in \mathcal{L}^p$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Mit $\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{\mathcal{L}^p}$ für alle $f \in \mathcal{L}^p$ wird L^p dann zu einem normierten Raum⁴

- **Bemerkung 2.20:** Mit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ und dem Zählmaß μ gilt $(L^p, \|\cdot\|_{L^p}) = (\ell^p, \|\cdot\|_p)$.

²d.h., Ω eine nichtleere beliebige Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$

³ $|f| \leq \lambda$ gilt μ -f.ü., wenn $\exists N = N_{\lambda, f} \in \mathcal{A}: (\mu(N) = 0 \wedge (\forall \omega \in \Omega \setminus N: |f(\omega)| \leq \lambda))$

⁴Dabei verwenden wir insbesondere die Implikation $f = g \text{ } \mu\text{-f.ü.} \implies \int |f|^p d\mu = \int |g|^p d\mu$.

Zusatzaufgabe 2.1:

- (a) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, welcher hausdorffsch ist. Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge aus X in $(X, \mathcal{T})$ einen eindeutigen Grenzwert besitzt.

Bem.:

- (i) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt Umgebung von x in $(X, \mathcal{T})$, wenn es ein $B \in \mathcal{T}$ mit $x \in B$ und $B \subset A$ gibt. Gilt zusätzlich $A \in \mathcal{T}$, nennen wir A offene Umgebung von x in $(X, \mathcal{T})$.
(ii) Eine Folge $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ konvergiert in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gegen $x \in X$, wenn in jeder Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

- (b) X sei eine beliebige nichtleere Menge.

- (i) Welche Folgen konvergieren in X bzgl. der indiskreten Topologie?
(ii) Welche Folgen konvergieren in X bzgl. der diskreten Topologie?

Geben Sie dabei auch an, gegen welche Elemente aus X die Folgen konvergieren.

- (c) Gegeben seien die beiden Abbildungen

$$d_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |x - y| \quad \text{und} \\ d_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |\varphi(x) - \varphi(y)| \quad \text{mit} \quad \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}.$$

Zeigen Sie:

- (i) Sowohl d_1 als auch d_2 sind Metriken auf $\mathbb{R}$.
(ii) Die von d_2 induzierte Topologie stimmt mit der von d_1 induzierten Topologie überein?
(iii) $(\mathbb{R}, d_1)$ ist vollständig, während $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht vollständig ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.1:

- (a) Angenommen, es gäbe $x \neq y$ mit $x_n \rightarrow x$ und $x_n \rightarrow y$ in $(M, \mathcal{T})$. Da $(M, \mathcal{T})$ Hausdorffsch nach Voraussetzung ist, existieren $U, V \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Aufgrund der Konvergenz gibt es nun $N_U, N_V \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: (n \geq \max(N_U, N_V) \implies x_n \in U \cap V),$$

was wegen $U \cap V = \emptyset$ jedoch einen Widerspruch darstellt. Also ist der Grenzwert einer in einem Hausdorff-Raum konvergenten Folge eindeutig.

- (b) (i) Da die indiskrete Topologie $\mathcal{T}_{\text{indiskret}} = \{\emptyset, M\}$ nur ein Element enthält, welche als Umgebung eines Punktes in Frage kommt, und da diese Umgebung schon alle Elemente enthält, konvergiert in $(M, \{\emptyset, M\})$ jede Folge aus M gegen jedes Element aus M .
(ii) Da die diskrete Topologie $\mathcal{T}_{\text{disk}} = \mathcal{P}(M)$ auch alle einelementigen Mengen enthält, diese also als Umgebungen in Frage kommen, können nur Folgen konvergieren, für welche alle bis auf endlich viele Folgenglieder konstant sind, die entsprechende Konstante ist dann auch der Grenzwert.

- (c) (i) Die Abbildung $d_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |x - y|$ ist als norminduzierte Metrik eine Metrik (der Betrag erfüllt alle Eigenschaften einer Norm auf dem eindimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^1$). Die Abbildung d_2 ist ebenfalls eine Metrik, denn

- $|\cdot|$ Norm auf $\mathbb{R}^1$ und $\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$ wegen $\varphi'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2} > 0$ streng monoton wachsend (also injektiv) $\implies \forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$0 = d_2(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \iff \varphi(x) - \varphi(y) = 0 \iff \varphi(x) = \varphi(y) \iff x = y$$

- $|\cdot|$ Norm auf $\mathbb{R}^1 \implies$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: d_2(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(y) - \varphi(x)| = d_2(y, x)$$

- $|\cdot|$ Norm auf $\mathbb{R}^1 \implies$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: d_2(x, z) = |\varphi(x) - \varphi(z)| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - \varphi(z)| = d_2(x, y) + d_2(y, z)$$

- (ii) Aufgrund der in (i) gezeigten strengen Monotonie und Stetigkeit von φ , existiert nach dem Satz über die Existenz einer stetigen Inversen eine solche auf $\varphi(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. Somit ist $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ ein Homöomorphismus bezüglich der durch den üblichen Betrag induzierten Metrik. Da Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen stets offen sind (vgl. Eigenschaften stetiger Funktionen), sind somit die von d_1 und d_2 erzeugten Topologien gleich, denn:

- Sei O offen bezüglich d_2 und $x \in O$. Dann existiert $\delta > 0$ mit

$$B_{d_2}(\delta, x) := \{y \in \mathbb{R}: d_2(x, y) < \delta\} = \{y \in \mathbb{R}: |\varphi(x) - \varphi(y)| < \delta\} \subset O.$$

Da φ stetig ist, existiert ein $\eta > 0$, so dass für alle

$$\forall y \in \mathbb{R}: (d_1(x, y) < \eta \implies d_2(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| < \delta)$$

Also ist jede bezüglich d_2 offene Teilmenge auch bezüglich d_1 offen.

- Da φ ein Homöomorphismus ist, können wir φ durch φ^{-1} ersetzen und so analog zeigen, dass jede bezüglich d_1 offene Teilmenge auch bezüglich d_2 offen ist.
- (iii) Betrachte die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n := n$ in $(\mathbb{R}, d_2)$. Wegen $\varphi(x_n) = \frac{n}{1+n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ folgt, dass einerseits x_n eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d_2)$ ist (da $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ als in $(\mathbb{R}, d_1)$ konvergente Folge eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d_1)$ ist) und andererseits keinen Grenzwert besitzen kann, denn:
- Angenommen, es wäre x ein Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}, d_2)$, dann würde aufgrund der Stetigkeit von φ auch $\varphi(x_n) - \varphi(x) \rightarrow 0$ gelten, woraus $\varphi(x) = 1$ folgte. Wegen $1 \notin \varphi(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ existiert ein solches x jedoch nicht. Also ist $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht vollständig.

Zusatzaufgabe 2.2:

- (a) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(A, d|_A) \text{ ist vollständig} \iff A \text{ ist abgeschlossen in } (X, d).$$

- (b) Durch $x_n(t) := t^n - t^{3n}$ sei eine Folge in $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ definiert. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent?

- (c) (i) Ist in $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ die Teilmenge $M := \{x \in \ell^1 \mid \forall k \in \mathbb{N}: |x(k)| \leq 1\}$ abgeschlossen?

- (ii) Sei $k \in \mathbb{N}$. Überprüfen Sie in $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ die Abgeschlossenheit der Teilmenge

$$\mathbb{P}_k := \left\{ x \in C([a, b], \mathbb{R}) \mid x(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i t^i \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha_k \neq 0 \right\}.$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.2:

- (a) „ $\implies$ “: Sei $(A, d|_A)$ vollständig und $b \in X$ Berührungspunkt von A in (X, d) . Dann existiert eine Folge a_n aus A , die in (X, d) gegen b konvergiert, diese ist dann auch eine Cauchy-Folge in (X, d) , also – wegen $a_n \in A$ und $d = d|_A$ auf A – auch eine Cauchy-Folge in $(A, d|_A)$. Aufgrund der Vollständigkeit muss die Folge a_n dann auch in $(A, d|_A)$ konvergieren, d.h., es muss ein $a \in A$ mit $d|_A(a_n, a) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ existieren. Wegen $a, a_n \in A$ und $d = d|_A$ auf A muss dann a_n auch in (X, d) gegen a konvergieren. Da jeder metrische Raum Hausdorffsch ist (vgl. ZA 1.3 (d)) und Grenzwerte in Hausdorff-Räumen eindeutig sind (vgl. ZA 2.1 (a)), folgt nun auch $b = a \in A$,

d.h., A ist abgeschlossen in (X, d) .

„ $\Leftarrow$ “: Sei A abgeschlossen in (X, d) und $x_n \in A$ eine Cauchy-Folge in (X, d) . Dann konvergiert x_n aufgrund der Vollständigkeit von (X, d) gegen einen Punkt $x \in X$, der wegen $x_n \in A$ offensichtlich ein Berührungspunkt von A ist. Aufgrund der Abgeschlossenheit von A muss x jedoch schon in A liegen, d.h., x_n konvergiert bereits in $(A, d|_A)$. Somit ist $(A, d|_A)$ vollständig.

- (b) • Wenn x_n in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm (also gleichmäßig) gegen ein x konvergiert, so muss x_n notwendigerweise auch punktweise gegen diesen Grenzwert konvergieren. Wegen $x_n = t^n(1 - t^{2n})$ muss somit $x(t) \equiv 0$ gelten.
- Wegen $x'_n(t) = nt^{n-1} - 3nt^{3n-1} = t^{n-1}(n - 3nt^{2n})$ nimmt x_n sein Maximum bei $t_0(n) = 3^{-\frac{1}{2n}}$ an, so dass die Folge $(x_n)_n$ in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm aufgrund von

$$\max_{t \in [0,1]} |x_n(t)| = x_n(t_0(n)) = 3^{-\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} 3^{-\frac{1}{2}} \not\rightarrow 0$$

nicht konvergiert.

- (c) (i) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_n(k))_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $M \subset \ell^1$ mit $x_n \rightarrow x_0$ in $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. Dies bedeutet also $\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k) - x_0(k)| \right) =: a_n \rightarrow 0$. Aufgrund der nichtnegativen Summanden muss dann notwendigerweise auch $|x_n(k) - x_0(k)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ gelten.

- Angenommen, es gelte $|x_0(k)| > 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so folgte nach der umgekehrten Dreiecksungleichung wegen $x_n \in M$ der Widerspruch

$$0 < \varepsilon := |x_0(k)| - 1 \leq |x_0(k)| - |x_n(k)| \leq |x_n(k) - x_0(k)| \rightarrow 0,$$

wonach also $\forall k \in \mathbb{N}: |x_0(k)| \leq 1$, d.h. gelten muss.

Somit gilt $x_0 \in M$ und M abgeschlossen in $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

- (ii) Die Folge $x_n(t) := n^{-1}t^k \rightarrow 0$ konvergiert offenbar in $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ gegen die Nullfunktion, welche – da der Koeffizient vor t^k nicht ungleich Null ist – nicht mehr in $\mathbb{P}_k$ liegt, obwohl $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in \mathbb{P}_k$ gilt. Somit ist $\mathbb{P}_k$ nicht abgeschlossen.

Zusatzaufgabe 2.3:

- (a) Zeigen Sie: (i) $p \in [1, \infty[\implies \ell^p \subset \ell^\infty$. (ii) $p, q \in [1, \infty[\wedge p < q \implies \ell^p \subset \ell^q$.
- (b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie: $p \in]1, \infty[\implies L^\infty \subset L^p \subset L^1$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 2.3:

- (a) (i) Dies folgt aus der Implikationskette

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|^p < \infty \implies \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi_k^p \text{ konvergent} \implies (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} \implies (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt.}$$

- (ii) Für $1 \leq p < q$ und $x \in \ell^p$ ist wegen $|\xi_k|^p \rightarrow 0 \implies |\xi_k| \rightarrow 0 \implies |\xi_k|^{q-p} \rightarrow 0$ für $k \geq k_0$ mit einem $k_0 \in \mathbb{N}$ auch die Ungleichung $|\xi_k|^q = |\xi_k|^{q-p} |\xi_k|^p \leq 1 \cdot |\xi_k|^p$ erfüllt, so dass aus $x \in \ell^p$ mit dem Majorantenkriterium auch $x \in \ell^q$ folgt.

- (b) Es ist $L^\infty \subset L^p$ wegen

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_{\Omega} |f(\omega)|^p d\mu \leq \|f\|_{L^\infty}^p \cdot \mu(\Omega).$$

Die zweite Inklusion folgt sofort aus der Hölder-Ungleichung mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ wegen

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(\omega)| \cdot 1 d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f(\omega)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} |1|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^p} \cdot (\mu(\Omega))^{\frac{1}{q}}.$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 3

Stetige lineare Abbildungen

- **Definition 3.1:** Eine Abbildung $A: E \rightarrow F$ zwischen zwei Vektor-Räumen heißt
 - (a) **linear** : $\iff \forall x, y \in E \forall \alpha \in \mathbb{K}: A(x + y) = Ax + Ay \wedge A(\alpha x) = \alpha A(x)$;
 - (b) **injektiv** : $\iff \forall x, y \in E : (A(x) = A(y) \implies x = y)$.
- **Definition 3.2:** Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Sei $A: E \rightarrow F$ linear. Dann heißt A **beschränkt** : $\iff \exists M \in [0, \infty[: \forall x \in E \|Ax\|_F \leq M\|x\|_E$.
- **Definition 3.3:** Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $x_0 \in X$. Dann heißt f **stetig im Punkt** x_0 genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus X gilt

$$d_X(x_n, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies d_Y(f(x_n), f(x_0)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$
- **Lemma 3.4:** In einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ sind Addition, Multiplikation mit Skalaren und die Norm stetig.
- **Satz 3.5:** Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$, $A: E \rightarrow F$ eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung, $x_0 \in E$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
 - (a) A ist stetig in x_0 .
 - (b) A ist stetig.
 - (c) A ist beschränkt.
- **Definition 3.6:** Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Dann definieren wir

$$\mathcal{L}(E, F) := \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) := \{A: E \rightarrow F \mid A \text{ } \mathbb{K}\text{-linear und stetig}\}.$$

Desweiteren definieren wir die **Operatornorm**⁵

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F \quad (3.1)$$

- **Satz 3.7:** $A \mapsto \|A\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{L}(E, F)$.
- **Satz 3.8:** Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Desweiteren seien $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $B \in \mathcal{L}(F, G)$. Dann gilt $B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$, $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.
- **Satz 3.9:** Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Desweiteren sei $(F, \|\cdot\|_F)$ vollständig (also ein Banachraum). Dann ist auch $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)})$ ein Banachraum.
- **Definition 3.12:** Sei E ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum sowie $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ zwei beliebige Normen auf E . Dann sagen wir:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_a \text{ ist stärker als } \|\cdot\|_b &: \iff \text{Id}_E: (E, \|\cdot\|_a) \rightarrow (E, \|\cdot\|_b) \text{ ist stetig} \\ &\iff \exists M \in [0, \infty[\forall x \in E: \|x\|_b \leq M\|x\|_a \end{aligned}$$

- **Bemerkung 3.14:**

- (a) Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind gleichstark, wenn $\|\cdot\|_a$ stärker als $\|\cdot\|_b$ und $\|\cdot\|_b$ stärker als $\|\cdot\|_a$ ist, also genau dann, wenn

$$\exists M_a, M_b \in [0, \infty[\forall x \in E \setminus \{0\}: M_a \leq \frac{\|x\|_a}{\|x\|_b} \leq M_b \quad (3.2)$$

- (b) Nach Definition 3.12 ist eine beliebige Norm stärker als sie selbst.

⁵Die Normeigenschaften werden im nachfolgenden Satz bewiesen.

Endlichdimensionale normierte Räume

- **Satz 4.1:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Desweiteren seien $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängig in E . Dann existiert ein $\mu > 0$, so dass

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}^n: \|\alpha\|_{\ell^1(n)} := \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \leq \mu \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\| \quad (3.3)$$

- **Corollar 4.2:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ mit $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n \in \mathbb{N}$. Desweiteren sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von E und die lineare Abbildung

$$A: (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\ell^1(n)}) \rightarrow (E, \|\cdot\|_E), \quad \alpha \mapsto \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$$

gegeben. Dann ist A ein **Homöomorphismus**, d.h., A ist bijektiv, stetig und A^{-1} ist stetig.

- **Satz 4.3:** Sei E ein n -dimensionaler Raum über $\mathbb{K}$. Desweiteren seien $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ zwei beliebige Normen auf E . Dann sind $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ gleichstark (äquivalent).
- **Satz 4.4:** Seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$ und $A: (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ linear und ein Homöomorphismus (d.h., A ist bijektiv, stetig und A^{-1} ist stetig) sowie $(E, \|\cdot\|_E)$ vollständig. Dann ist $(F, \|\cdot\|_F)$ ein Banachraum (d.h., vollständig).
- **Corollar 4.5:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) mit $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum (d.h., vollständig).
- **Satz 4.6:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ und $F \subset E$ ein endlichdimensionaler linearer Unterraum. Dann ist F abgeschlossen (in $(E, \|\cdot\|_E)$).
- **Satz 4.7:** Seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ normierte lineare Räume über $\mathbb{K}$ mit $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n \in \mathbb{N}$. Desweiteren sei $B: E \rightarrow F$ linear. Dann ist B auch stetig, d.h., es gilt $B \in \mathcal{L}(E, F)$.

Riezsches Lemma und seine Anwendungen

- **Lemma 4.8 [Rieszsches Lemma]:** Zu $(E, \|\cdot\|_E)$ sei $F \neq E$ ein abgeschlossener Unterraum von E . Dann gelten

- (a) $\exists \tilde{x} \in E: \left(\|\tilde{x}\| = 1 \wedge \forall x \in F: \|x - \tilde{x}\| \geq \frac{1}{2} \right).$
 (b) $\forall \eta \in]0, 1[\exists x_\eta \in E: (\|x_\eta\| = 1 \wedge \forall x \in F: \|x - x_\eta\| \geq \eta).$

- **Korollar 4.9:** Zu $(E, \|\cdot\|_E)$ sei $F \neq E$ ein abgeschlossener Unterraum von E und $\delta > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $y \in E$, so dass

$$\forall x \in F: \|x - y\|_E \geq \delta. \quad (3.4)$$

- **Satz 4.11:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ unendlich-dimensional. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus E mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \|x_n\|_E = 1 \quad \text{und} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}: \left(m \neq n \implies \|x_n - x_m\|_E \geq \frac{1}{2} \right)$$

- **Beispiel 4.12:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ unendlich-dimensional. Dann ist die Einheitsphäre

$$S := \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\} \quad (3.5)$$

nicht kompakt.

- **Satz 4.13:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ unendlich-dimensional, $K \subset E$, K kompakt. Dann ist das Innere von K leer, d.h., K enthält keine offene Kugel.

Zusatzaufgabe 3.1:

- (a) Sei $A: E \rightarrow F$ linear. Zeigen Sie: A **beschränkt** $\iff \forall x \in E: (\|x\|_E \leq 1 \implies \|Ax\|_F \leq M)$.
- (b) Seien E und F endlichdimensionale Vektorräume der gleichen Dimension und $A: E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:
 A bijektiv $\iff A$ injektiv oder surjektiv.
- (c) Konstruieren Sie zwei Endomorphismen auf $C([a, b], \mathbb{R})$, wobei der erste injektiv, aber nicht surjektiv sei und der andere surjektiv, aber nicht injektiv sei.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.1:

- (a) Die folgt sofort aus der Homogenität der Norm.
- (b) „ $\implies$ “: Dies gilt nach Definition.
„ $\impliedby$ “:
(i) Sei A injektiv, $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von E , dann ist $\{Ax_1, \dots, Ax_n\}$ linear unabhängig, also eine Basis von F , somit gilt für jedes $y \in F$ schon $y = \sum_j \alpha_j Ax_j = A \left(\sum_j \alpha_j x_j \right)$, also ist A auch surjektiv.
(ii) Sei jetzt A surjektiv, $\{y_1, \dots, y_n\}$ eine Basis von F , dann folgt $\forall j \in \{1, \dots, n\} \exists x_j: y_j = Ax_j$, wobei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von E sein muss, denn:
- Aus der Linearität von A und aufgrund der linearen Unabhängigkeit der y_j folgt aus

$$0 = \sum_j \alpha_j x_j$$

sofort auch

$$0 = A0 = A \left(\sum_j \alpha_j x_j \right) = \sum_j \alpha_j Ax_j = \sum_j \alpha_j y_j \implies \forall j \in \{1, \dots, n\}: \alpha_j = 0,$$

also ist $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren. Aufgrund der Anzahl schließen wir, dass $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis ist.

Da $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis ist, folgt nun die Injektivität wegen der linearen Unabhängigkeit der y_j und

$$Ax = 0 \iff 0 = A \left(\sum_j \alpha_j x_j \right) = \sum_j \alpha_j Ax_j = \sum_j \alpha_j y_j.$$

- (c) Wir betrachten auf $C([-1, 1], \mathbb{R})$ die linearen Operatoren $G, H: C([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([-1, 1], \mathbb{R})$, gegeben durch

$$G(x)(t) := x \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right)$$

und

$$H(x)(t) := \begin{cases} x(-1), & \text{falls } t < 0, \\ x(2t - 1), & \text{falls } t \geq 0. \end{cases}$$

Da für alle $x \in C([-1, 1], \mathbb{R})$ wegen

$$t \in [-1, 1] \implies (G \circ H)(x)(t) = H(x) \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right) = x \left(2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right) - 1 \right) = x(t)$$

offenbar $G \circ H = \text{Id}$ gilt, muss G notwendigerweise surjektiv und H notwendigerweise injektiv sein. Jedoch ist G nicht injektiv, denn für

$$x_1(t) = t \quad \text{und} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ t, & \text{falls } t \geq 0, \end{cases}$$

gilt

$$G(x_1)(t) = x_1 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = x_2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right) = G(x_2)(t),$$

und H ist nicht surjektiv, da im Bild von H nur stetige Funktionen liegen, die auf $[-1, 0]$ konstant sind.

Zusatzaufgabe 3.2:

- (a) Gegeben sei die Norm $\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$ auf dem Raum der beschränkten reellen Zahlenfolgen

$$\ell^\infty := \left\{ x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} : \left(\forall n \in \mathbb{N} \ \xi_n \in \mathbb{R} \ \wedge \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n| < \infty \right) \right\}.$$

Auf $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ seien der **Shift-Operator** $S: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ durch $S(\xi_1, \xi_2, \dots) := (\xi_2, \xi_3, \dots)$ und der **Differenzoperator** $D: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ durch $D(\xi_1, \xi_2, \dots) := (\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2, \dots)$ definiert. Überprüfen Sie, ob $S, D \in L(\ell^\infty, \ell^\infty)$ gilt. Falls ja, berechnen Sie $\|S\|_{L(\ell^\infty, \ell^\infty)}$ und $\|D\|_{L(\ell^\infty, \ell^\infty)}$.

- (b) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$A: f \mapsto \int_0^1 xf(x)dx$$

ist linear und stetig von $X := (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nach $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, d.h., $A \in L(X, Y)$.

- (c) Sei $z \in \ell^\infty$ und $T_z: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ durch $T_z(x)(n) := z(n) \cdot x(n)$ definiert. Berechnen Sie $\|T_z\|$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.2:

- (a) Seien ξ und ψ aus ℓ^∞ . Dann gelten für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ offenbar

$$\begin{aligned} S(\lambda\xi + \mu\psi) &= S(\lambda\xi_1 + \mu\psi_1, \lambda\xi_2 + \mu\psi_2, \dots) = (\lambda\xi_2 + \mu\psi_2, \lambda\xi_3 + \mu\psi_3, \dots) \\ &= \lambda(\xi_2, \xi_3, \dots) + \mu(\psi_2, \psi_3, \dots) = \lambda S(\xi) + \mu S(\psi) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} D(\lambda\xi + \mu\psi) &= D(\lambda\xi_1 + \mu\psi_1, \lambda\xi_2 + \mu\psi_2, \dots) \\ &= (\lambda\xi_2 + \mu\psi_2 - (\lambda\xi_1 + \mu\psi_1), \lambda\xi_3 + \mu\psi_3 - (\lambda\xi_2 + \mu\psi_2), \dots) \\ &= \lambda(\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2, \dots) + \mu(\psi_2 - \psi_1, \psi_3 - \psi_2, \dots) = \lambda D(\xi) + \mu D(\psi), \end{aligned}$$

wonach beide Operatoren linear sind. Desweiteren gilt

$$\|S\xi\|_\infty = \|S(\xi_1, \xi_2, \dots)\|_\infty = \|(\xi_2, \xi_3, \dots)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_{n+1}| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n| = \|\xi\|_\infty.$$

Nach Lemma 1.50 ist daher $S \in L(\ell^\infty, \ell^\infty)$ mit $\|S\|_{L(\ell^\infty, \ell^\infty)} \leq 1$. Da für $\xi = (0, 1, 1, \dots)$ sowohl $\|\xi\|_\infty = 1$ als auch $\|S\xi\|_\infty = 1$ erfüllt ist, folgt nun nach (3.1) insgesamt $\|S\|_{L(\ell^\infty, \ell^\infty)} = 1$.

Wegen $D\xi = S\xi - \xi$ folgt mittels Dreiecksungleichung $\|D\xi\|_\infty \leq \|S\xi\|_\infty + \|-\xi\|_\infty \leq 2\|\xi\|_\infty$, also $D \in L(\ell^\infty, \ell^\infty)$ wiederum nach Lemma 1.50 mit $\|D\|_{L(\ell^\infty, \ell^\infty)} \leq 2$. Da $\|D\xi\|_\infty = 2\|\xi\|_\infty$ für $\xi = (1, -1, 0, 0, \dots)$ gilt, ist $\|D\|_{L(\ell^\infty, \ell^\infty)} = 2$ nach (3.1).

- (b) Wegen $A(f + g) = \int_0^1 x(f(x) + g(x))dx = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 xg(x)dx = A(f) + A(g)$ und

analog $A(\lambda f) = \int_0^1 x(\lambda f(x))dx = \lambda \int_0^1 xf(x)dx = \lambda A(f)$ (denn das Integral selbst ist auch ein lineares Funktional) ist A eine lineare Funktion von X nach Y . Um die Stetigkeit zu zeigen, wenden wir Satz 3.5 an. Für ein beliebiges $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ haben wir die Abschätzung

$$|A(f)| = \left| \int_0^1 xf(x)dx \right| \leq \int_0^1 |xf(x)|dx \leq \int_0^1 x \cdot \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_\infty} dx \leq \|f\|_\infty \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \cdot \|f\|_\infty,$$

Also gibt es eine Konstante $L = \frac{1}{2} < \infty$, so dass $\forall f \in X: \|A(f)\|_Y \leq L\|f\|_X$. (Tatsächlich ist $\|A\|_{L(X, Y)} = \frac{1}{2}$, denn Gleichheit gilt beispielsweise für die konstante Funktion $f = 1$.)

(c) Zunächst gilt:

$$\|T_z x(n)\| \leq \|z\| \cdot \|x\|.$$

Sei x durch $x(n) \equiv 1$ definiert. Dann ist $T_z x = z$ und somit $\|T_z\| = \|z\|$.

Zusatzaufgabe 3.3: (Stetige lineare Abbildungen auf endlich-dimensionalen Räumen)

(a) Für ein $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ sei $\|f\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{ij}^2}$. Zeigen Sie:

Auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ ist $\|\cdot\|_F$ eine Norm und für alle linearen Abbildungen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ gilt

$$\|f\| \leq \|f\|_F.$$

Bemerkung: $\|\cdot\|_F$ heißt **Frobenius-Norm**.

- (b) Sei $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Zu festen Basen sei $B := (b_{jk})_{j,k=1}^{n,m}$ die zugehörige Matrix von $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Operatornorm von B als Abbildung von $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
- (c) Für $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ sei $\mathcal{B} \in L(X, Y)$ und zu festen Basen sei $B := (b_{jk})_{j,k=1}^{n,m}$ die zugehörige Matrix von $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Operatornorm $\|B\|_{L(X,Y)}$.
- (d) Auf $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ sei $\mathcal{A} \in L(X, X)$ derart gegeben, dass zu festen Basen eine zugehörige symmetrische Matrix $A := (a_{jk})_{j,k=1}^n$ von $\mathcal{A}$ existiert. Bestimmen Sie die Operatornorm.⁶

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.3:

- (a) Wir bezeichnen die Matrix A zu f mit A_f . Ist $\mathcal{M}_{k \times m}(\mathbb{R})$ der $(\mathbb{R})$ -Vektorraum der $k \times m$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$, so ist auf diese Weise ein $(\mathbb{R})$ -Vektorraum-Isomorphismus

$$M: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathcal{M}_{k \times m}(\mathbb{R}), \quad f \mapsto A_f,$$

gegeben, wie Ihnen aus der linearen Algebra bekannt sein sollte. Wir betrachten die Abbildung $H: \mathcal{M}_{k \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{km}$ gegeben durch

$$H: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}, \dots, a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{km}).$$

H ist linear, offenbar ist H surjektiv und der Kern von H gleich $\{0\}$. Darum ist H ein Vektorraum-Isomorphismus. Es folgt somit, dass auch $H \circ M: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^{km}$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Die euklidische Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^{km}$ steht mit der Funktion $\|\cdot\|_F$ in der Beziehung $\|f\|_F = \|H \circ M(f)\|$. Da $\|\cdot\|$ eine Norm ist und $H \circ M$ ein Vektorraum-Isomorphismus, gelten die Äquivalenzen

$$\|f\|_F = \|H \circ M(f)\| = 0 \iff H \circ M(f) = 0 \iff f = 0.$$

Da $\|\cdot\|$ eine Norm ist, gilt für $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ weiterhin

$$\begin{aligned} \|f + g\|_F &= \|H \circ M(f + g)\| = \|H \circ M(f) + H \circ M(g)\| \\ &\leq \|H \circ M(f)\| + \|H \circ M(g)\| \\ &\leq \|f\|_F + \|g\|_F, \end{aligned}$$

⁶Zur Erinnerung: Symmetrische Matrizen A (Matrizen mit $A^T = A$) besitzen nur reelle Eigenwerte. Weiterhin existiert eine orthogonale Matrix U (deren Spalten aus den paarweise orthogonalen Eigenvektoren von A bestehen), so dass $U^T A U$ eine Diagonalmatrix ist (Hauptachsentransformation), auf deren Diagonalen die Eigenwerte von A stehen.

Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt analog

$$\|\alpha f\|_F = \|H \circ M(\alpha f)\| = \|\alpha H \circ M(f)\| \leq |\alpha| \|H \circ M(f)\| = |\alpha| \|f\|_F.$$

Daher ist $\|\cdot\|_F$ eine Norm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$.

Alternativ kann man auch die Eigenschaften direkt mit der Definition nachprüfen.

Da $\mathbb{R}^m \neq \{0\}$, gilt für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^m: \|x\|=1} \|fx\|.$$

Sei nun $A = (a_{ij}) := A_f$ und $x \in \mathbb{R}^m$ mit $\|x\| = 1$. Es gilt

$$\|fx\| = \|Ax\| = \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_{n,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{kj}x_{n,j} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}x_{n,j} \right)^2}.$$

Nun gilt nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung

$$\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}x_{n,j} \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 \right) = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right) \|x\|^2$$

und wegen $\|x\| = 1$ folgt

$$\|fx\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{ij}^2} = \|f\|_F.$$

Es folgt

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^m: \|x\|=1} \|fx\| \leq \|f\|_F.$$

- (b) Die Operatornorm ist in diesem Fall $\|B\| = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{k=1}^m |b_{jk}|$ (die sog. Zeilensummennorm), denn mit $Bx = \left(\sum_{k=1}^m b_{jk}x_k \right)_{j=1}^n$ erhalten wir Gleichheit in der Ungleichungskette

$$\|Bx\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} \left| \sum_{k=1}^m b_{jk}x_k \right| \leq \max_{j=1, \dots, n} \sum_{k=1}^m |b_{jk}| \cdot \underbrace{|x_k|}_{\leq \|x\|_\infty} \leq \left(\max_{j=1, \dots, n} \sum_{k=1}^m |b_{jk}| \right) \|x\|_\infty$$

für den Vektor $x = (\text{sign}(b_{jk}))_{k=1}^m$ mit einem j , für welches die Zeilensumme maximal wird.

- (c) Die Operatornorm ist in diesem Fall $\|B\| = \max_{s=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |b_{js}|$ (die sog. Spaltensummennorm), denn mit $Bx = \left(\sum_{k=1}^m b_{jk}x_k \right)_{j=1}^n$ erhalten wir die Ungleichung $\|Bx\|_1 \leq \max_{s=1, \dots, m} \left(\sum_{j=1}^n |b_{js}| \right) \|x\|_1$ über

$$\|Bx\|_1 = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^m b_{jk}x_k \right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |b_{jk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{k=1}^m \max_{s=1, \dots, m} \left(\sum_{j=1}^n |b_{js}| \right) |x_k|,$$

wobei Gleichheit für den k -ten Einheitsvektor auftritt, falls die k -te Spaltensumme maximal ist.

- (d) Dass die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ symmetrischer Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sämtlich reell sind und darüberhinaus eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, so dass $U^T A U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ Diagonalgestalt hat, liefert die Lineare Algebra. Besitzt nun $\mathcal{A}$ eine symmetrische Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und bezeichnet $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die zugehörige orthogonale Transformationsmatrix U mit $U^T A U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$, gilt aufgrund der Orthogonalität $U^T U = I_n$ und

$$\|Ux\|_2^2 = \langle Ux, Ux \rangle = (Ux)^T Ux = x^T (U^T U x) = x^T I_n x = x^T x = \|x\|_2^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, also insbesondere $U(\partial B_1(0)) = \partial B_1(0) = U^T(\partial B_1(0))$. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|AUx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|U^T AUx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2 \\ &= \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2} \leq \max_{k=1, \dots, n} |\lambda_k| \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \max_{k=1, \dots, n} |\lambda_k| \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = \max_{k=1, \dots, n} |\lambda_k| \end{aligned}$$

und $\|A\| \geq \|De_j\|_2 = \max_{k=1, \dots, n} |\lambda_k|$ mit dem Einheitsvektor $x = e_j$ für ein j mit $\max_{k=1, \dots, n} |\lambda_k| = |\lambda_j|$.

Zusatzaufgabe 3.4: Sei $A: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ definiert durch $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots)$.

(a) Zeigen Sie:

- (i) A ist injektiv. (ii) A ist stetig. (iii) $\|A\| = 1$. (iv) A ist nicht surjektiv.

(b) Zeigen Sie, dass $A^{-1}: A(\ell^\infty) \rightarrow \ell^\infty$ nicht stetig ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 3.4:

(a) Zunächst einmal ist $A: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ linear, da

$$A(\lambda(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} + \mu(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \left(\frac{\lambda\xi_k + \mu\eta_k}{k} \right)_{k \in \mathbb{N}} = \lambda A(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} + \mu A(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

- (i) Die Abbildung ist injektiv, denn aus $Ax = A\tilde{x}$ folgt in jeder Komponente $\frac{\xi_k}{k} = \frac{\eta_k}{k}$, also auch in jeder Komponente $\xi_k = \eta_k$, also $x = \tilde{x}$.
(ii) Aufgrund der Linearität genügt es, die Beschränktheit zu zeigen. Wegen

$$\|Ax\|_{\ell^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{\xi_k}{k} \right| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k| = \|x\|_{\ell^1}$$

ist die obige lineare Abbildung $A: (\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty}) \rightarrow (\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ beschränkt, also nach Satz 3.5 stetig.

- (iii) Nach (ii) muss die Operatornorm $\|A\|_{L(\ell^\infty, \ell^\infty)}$ kleiner oder gleich 1 sein. Da für $x = (1)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ sowohl $\|x\|_{\ell^\infty} = 1$ als auch $\|Ax\|_{\ell^\infty} = 1$ gilt, folgt sogar $\|A\|_{L(\ell^\infty, \ell^\infty)} = 1$.

(iv) Die konstante Einsfolge ist nicht im Bild.

(b) Der lineare Operator $A^{-1}: A(\ell^\infty) \rightarrow \ell^\infty$ ist unstetig, denn für jedes $m \in \mathbb{N}$ erfüllt der m -te Einheitsvektor

$$x^{(m)} = \left(\xi_k^{(m)} \right)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \xi_k^{(m)} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowohl $\|x^{(m)}\|_{\ell^\infty} = 1$ als auch $x^{(m)} \in A(\ell^\infty)$ mit Urbild $y^{(m)} = mx^{(m)}$, welches wegen $\|y^{(m)}\|_{\ell^\infty} = m\|x^{(m)}\|_{\ell^\infty} = m$ in der Tat in ℓ^∞ liegt.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 4

Zusatzaufgabe 4.1:

- (a) Gegeben seien $(X, \|\cdot\|_X)$ nichttrivial und $S, T \in L(X, X)$. Zeigen Sie: Es gilt $ST - TS \neq \text{Id}$.

Tip: Zeigen Sie zunächst $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ unter der Annahme, dass $ST - TS = \text{Id}$ gelte. Folgern Sie dann aus $\|S\|, \|T\| < \infty$, dass $\|T^n\| = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten muss. Verwenden Sie dies, um im Widerspruch zur Voraussetzung auf $T = 0$ zu schließen.

- (b) Auf der Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sei $f: \bar{\mathbb{R}} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} \arctan(x) & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\pi}{2} & x = \infty, \\ -\frac{\pi}{2} & x = -\infty. \end{cases}$

Zeigen Sie:

- (i) Mit $\bar{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|$ erhalten wir den metrischen Raum $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d})$.
- (ii) Welche Ihnen bekannten Konvergenzbegriffe umfasst die Konvergenz in $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d})$?
- (iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der Einschränkung $\bar{d}|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ unvollständig ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.1:

- (a) Angenommen, es gäbe $S, T \in L(X, X)$ mit $ST - TS = \text{Id}$. Dann gilt $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wie man per Induktion beweisen kann: Die Gleichung ist offensichtlich für $n = 0$ nach Voraussetzung erfüllt, und ist sie für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ richtig, so folgt

$$\begin{aligned} ST^{n+2} - T^{n+2}S &= ST^{n+2} - T^{n+1}(TS) = ST^{n+2} - T^{n+1}(ST - \text{Id}) \\ &= (ST^{n+1} - T^{n+1}S)T + T^{n+1} = (n+2)T^{n+1} \end{aligned}$$

also die behauptete Gleichung für $n+1$. Insbesondere folgt nun aus $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$ auch $(n+1)\|T^n\| \leq \|S\|\|T\|\|T^n\| + \|T^n\|\|T\|\|S\| = 2\|S\|\|T\|\|T^n\|$. Würde nun $\|T^n\| \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, dann würde also $(n+1) \leq 2\|S\|\|T\|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgen, was der Stetigkeit von S, T offensichtlich widerspricht, die ja gleichbedeutend mit $\|S\|, \|T\| < \infty$ ist. Also muss es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T^n\| = 0$, und somit $T^n = 0$ geben. Aus $ST^n - T^nS = nT^{n-1}$ ergibt sich dann aber auch $T^{n-1} = 0$ und induktiv auch $T^k = 0$ für $k = n, \dots, 1$, insbesondere $T = 0$, was jedoch im Widerspruch zur Annahme $ST - TS = \text{Id}$ steht.

- (b) (i) Die Symmetrie und Dreiecksungleichung vererben sich durch $|\cdot|$ (beachte, dass die Metrik stets endlich ist), die Definitheit erhalten wir aus der strengen Monotonie des Arcus Tangens.
- (ii) Die Konvergenz in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sowie die bestimmte Divergenz.
- (iii) Betrachte die Folge $x_n := n$. Wegen der monotonen Konvergenz $\arctan(n) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ für $n \rightarrow \infty$ und der daraus folgenden Existenz eines N_ε mit

$$n > m \geq N_\varepsilon \implies |f(n) - f(m)| \leq \frac{\pi}{2} - f(m) < \varepsilon$$

ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $\bar{d}|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$, welche dort jedoch keinen Grenzwert besitzt.

Zusatzaufgabe 4.2:

- (a) Entscheiden Sie, ob die Menge $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ kompakt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = \text{Id}\}$ der orthogonalen reellen $n \times n$ -Matrizen im normierten Raum $(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)})$ der stetigen linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ kompakt ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Einheitssphäre in $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.2:

- (a) Aufgrund der Unbeschränktheit kann $\mathbb{Q}$ nicht kompakt sein (vgl. Satz 3, §3 Forster 2). Darüber hinaus ist $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ auch nicht abgeschlossen.
- (b) Zunächst halten wir fest, dass die Dimension von $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ endlich, nämlich n^2 ist. Nach dem Satz von Heine-Borel genügt es somit, die Beschränktheit und Abgeschlossenheit von $O(n)$ in $(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)})$ zu zeigen.

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (vgl. die Äquivalenz von Normen nach Satz 1.19) betrachten wir den normierten Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, d.h., den $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Euklidischen Norm. Ist nun $A \in O(n)$, dann gilt nach Definition $A^T A = \text{Id}$ und somit für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \sqrt{(Ax)^T Ax} = \sqrt{x^T A^T Ax} = \sqrt{x^T \text{Id} x} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|_2.$$

Folglich ist $\|A\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq 1$ für $A \in O(n)$, d.h., es gilt $O(n) \subset \overline{B_1(0)}$ im normierten Raum $(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)})$, weswegen $O(n)$ beschränkt ist.

- Um die Abgeschlossenheit zu sehen, sei die Abbildung $f: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ durch $f(A) := A^T A$ definiert. Dann ist (vgl. Lemma 1.51) auch $f(A) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \|f(A) - f(B)\| &= \|A^T A - B^T B\| = \|A^T A - A^T B + A^T B - B^T B\| \\ &\leq \|A^T A - A^T B\| + \|A^T B - B^T B\| \leq \|A^T\| \|A - B\| + \|A^T - B^T\| \|B\|. \end{aligned}$$

Konvergiert nun B gegen A , dann tut es insbesondere auch jede Komponente, und somit konvergiert B^T gegen A^T ebenfalls. Aus obiger Abschätzung folgt dann auch $f(A) \rightarrow f(B)$. Also ist die Abbildung f stetig⁷ und aus der Definition ist offensichtlich, dass $f^{-1}(\{\text{Id}\}) = O(n)$ gilt. In jedem normierten (sogar in jedem metrischen) Raum ist eine einelementige Menge abgeschlossen. Dies impliziert daher auch die Abgeschlossenheit von $O(n)$ (als Urbild der einelementigen und somit abgeschlossenen Menge $\{\text{Id}\}$ unter der stetigen Funktion f).

Alternative: Die Matrizen mit $A^T A = \text{Id}$ sind genau die Matrizen, welche orthogonal sind, so dass nach Determinantensatz

$$1 = \det(\text{Id}) = (\det(A))(\det(A^T)) = (\det(A))^2 \iff \det(A) \in \{-1, 1\}$$

folgt, also ist $O(n) = \det^{-1}(\{-1, 1\})$ als Urbild einer abgeschlossenen (da endlichen) Menge unter der stetigen Funktion $\det: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ selbst wiederum abgeschlossen.

Aufgrund der Beschränktheit und Abgeschlossenheit folgt nun nach dem Satz von Heine-Borel (Satz 1.58) die Kompaktheit der Teilmenge $O(n)$ des endlich-dimensionalen normierten Vektorraumes $(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)})$.

- (c) Angenommen die Einheitssphäre in $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ sei kompakt. Dann enthielte jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $S := \{x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ stetig mit } \|x\|_\infty = 1\}$ bereits eine konvergente Teilfolge. Betrachten wir jedoch die durch

$$x_k(t) := \begin{cases} t2^k & 0 \leq t \leq \frac{1}{2^k}, \\ 1 & \frac{1}{2^k} < t \leq 1, \end{cases}$$

gegebene Folge stetiger Funktionen auf $[0, 1]$, so gilt wegen $\|x_k\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |x_k(t)| = 1$ einerseits $x_k \in S$ für alle k , andererseits erhalten wir für beliebige $k > l$ offenbar

$$\|x_k - x_l\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |x_k(t) - x_l(t)| \geq \left| x_k\left(\frac{1}{2^k}\right) - x_l\left(\frac{1}{2^k}\right) \right| = 1 - 2^l \cdot \frac{1}{2^k} = 1 - 2^{l-k} \geq \frac{1}{2},$$

womit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine Teilfolge enthalten kann, die eine Cauchyfolge ist, also auch keine konvergente Teilfolge. Widerspruch! Somit kann S in $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt sein.

⁷Vorsicht: f selbst ist nicht linear!

Zusatzaufgabe 4.3: Zeigen Sie für einen normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ die Äquivalenz von

- (a) E ist endlichdimensional.
- (b) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von E ist überdeckungskompakt.
- (c) Die abgeschlossene Einheitskugel ist kompakt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.3:

(a) $\implies$ (b): Sei E endlichdimensional und $A \subseteq E$ beschränkt und abgeschlossen. Da in metrischen Räumen

$$A \text{ folgenkompakt} \iff A \text{ überdeckungskompakt}$$

gilt (da jede Norm eine Metrik induziert, ist jeder normierte Raum auch ein metrischer Raum), genügt es, die Folgenkompaktheit von A nachzuweisen. Sei also (x_n) eine Folge in A . Da A beschränkt ist, ist auch (x_n) beschränkt, also insbesondere (x_n) eine beschränkte Folge in E . Da E endlichdimensional ist und somit der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt, folgt die Existenz einer Teilfolge, die in E konvergiert. Aus der Abgeschlossenheit von A folgt wiederum, dass die Teilfolge in A konvergieren muss. Also ist A folgenkompakt und somit überdeckungskompakt.

(b) $\implies$ (c): Da $K_1[0]$ abgeschlossen und beschränkt, folgt die Kompaktheit von $K_1[0]$ sofort aus (b).

(c) $\implies$ (a): Die abgeschlossene Einheitskugel $K_1[0]$ sei kompakt. Angenommen E ist von unendlicher Dimension.

- Sei $x_1 \in K_1[0]$, $x_1 \neq 0$, und $F_1 := \text{Erzeugnis}(x_1)$. Dann ist F_1 ein abgeschlossener Unterraum von E . Nach dem Riesz'schen Lemma existiert nun ein x_2 in E mit $\|x_2\| = 1$ (also $x_2 \in K_1[0]$), so dass $\text{dist}(x_2, F_1) \geq \frac{1}{2}$.
- Sei nun $F_2 := \text{Erzeugnis}(x_1, x_2)$. Dies ist wiederum ein abgeschlossener Unterraum von E . Also existiert nach dem Riesz'schen Lemma ein $x_3 \in K_1[0]$, so dass $\text{dist}(x_3, F_2) \geq \frac{1}{2}$.
- Sei nun $F_3 := \text{Erzeugnis}(x_1, x_2, x_3)$. Dann ...

Auf diese Weise erhalten wir eine beschränkte Folge (x_n) aus $K_1[0]$, bei welcher für alle $n > m$ stets $\|x_n - x_m\| \geq \text{dist}(x_n, F_m) \geq \frac{1}{2}$ gilt. Diese Folge enthält offensichtlich keine konvergente Teilfolge (da diese dann notwendigerweise eine Cauchyfolge sein müsste, was nicht möglich ist). Dies wiederum ist ein Widerspruch zur Kompaktheit (die Folgenkompaktheit impliziert) von $K_1[0]$, welche vorausgesetzt wurde.

Zusatzaufgabe 4.4: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

- (a) Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.
- (b) Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen ist kompakt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 4.4:

- (a) Ist $A \subset K$ abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums K und U_i eine offene Überdeckung von A , dann ist U_i zusammen mit $K \setminus A$ eine offene Überdeckung von K . Also gibt es endlich viele $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$, die zusammen mit $K \setminus A$ ganz K überdecken, und somit überdecken die endlich vielen offenen Mengen $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ ganz A .
- (b) Sei $(K_j)_{j \in J}$ eine Familie kompakter Teilmengen von M . Betrachten wir nun eine beliebige Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus dem Durchschnitt⁸ dann liegt sie auch in jeder der kompakten Teilmengen K_j , $j \in J$. Wählen wir nun ein K_{j^*} aus, so folgt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufgrund der Kompaktheit von K_{j^*} eine in K_{j^*} konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x^* \in K_{j^*}$ besitzt. Da diese Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in K liegt, besitzt sie in jedem K_j eine in K_j konvergente Teilfolge. Aufgrund der Konvergenz von $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x^* müssen aber auch sämtliche Teilfolgen von $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x^* konvergieren, also folglich auch $x^* \in K$ gelten. Somit ist K kompakt.

⁸Sollte der Durchschnitt leer sein, dann ist er nach Definition sofort kompakt, d.h., diesen Fall brauchen wir nicht betrachten.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 5

Hilberträume

- **Satz 5.3 [Cauchy-Schwarz-Ungleichung]:**

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Innenprodukt auf dem linearen Raum E und $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Dann gelten

$$(1) \quad \forall x, y \in E: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (2) \quad |\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \iff x, y \text{ linear unabhängig.}$$

- **Corollar 5.4:** $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ ist eine Norm auf E .

- **Definition 5.5:** Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Innenprodukt auf dem linearen Raum E .

- (a) Wir nennen $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen **Innenproduktraum** (oder auch einen **Prä-Hilbert-Raum**).
- (b) Wird $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit der induzierten Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ zu einem vollständig normierten Raum, so nennen wir $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen **Hilbert-Raum**.

- **Bemerkung 5.6:**

- (a) Topologische Räume $\supset$ metrische Räume $\supset$ normierte Räume $\supset$ Innenprodukträume $\supset$ Hilberträume
- (b) $H = L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wird mit $(f, g)_{L^2} := \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$ zum Hilbert-Raum $(H, (\cdot, \cdot)_{L^2})$.
- (c) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist der Spezialfall $p = q = 2$ der Hölder-Ungleichung.

- **Satz 5.7:** Das Innenprodukt ist stetig bezüglich der induzierten Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

- **Satz 5.8 [Parallelogramm-Gleichung]:** In jedem Innenproduktraum $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt

$$\forall x, y \in E: \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) . \quad (5.1)$$

- **Satz 5.9:** In jedem Innenproduktraum $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt mit der induzierten Norm

$$(1) \quad \forall x, y \in E: \langle x, y \rangle = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 \text{ im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$(2) \quad \forall x, y \in E: \langle x, y \rangle = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 + i \left\| \frac{x+iy}{2} \right\|^2 - i \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|^2 \text{ im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

- **Definition 5.10:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum. Weiter seien $x, y \in E$ sowie $N, M \subset E$.

- (1) $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$. Wir sagen x ist **orthogonal** zu y .
- (2) $M \perp N \iff \forall x \in M \forall y \in N: x \perp y$.
- (3) $x \perp M \iff \{x\} \perp M$.
- (4) $M^{\perp} := \{x \in E \mid x \perp M\}$.

- **Bemerkung 5.11:**

- (1) Für jedes $M \subset E$ ist $M^{\perp}$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von E .
- (2) Ist $M \subset E$ ein linearer Unterraum, so folgt $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.
- (3) $x \perp M \implies x \perp \overline{\text{span}(M)} \implies x \perp \text{span}(M)$

- **Satz 5.12 [Pythagoras]:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum. Seien weiter $u_1, \dots, u_n \in E$ paarweise orthogonal, d.h., $\forall i, j = 1, \dots, n: (i \neq j \implies u_i \perp u_j)$. Dann gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 . \quad (5.2)$$

- **Korollar 5.13:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthogonalfolge aus E , für welche $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ in $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gegen ein $u \in E$ konvergiere. Dann gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \right\|^2 = \|u\|^2. \quad (5.3)$$

- **Definition 5.14:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, $\emptyset \neq S \subset E$.

- (1) S **orthogonal** $:\iff \forall x, y \in S: (x \neq y \implies x \perp y)$.
- (2) S **orthonormal** $:\iff S$ orthogonal und $\forall x \in S: \|x\| = 1$.
- (3) S **vollständiges Orthogonalsystem**
 $:\iff S$ orthogonal und $\forall S' \subset E: ([S' \text{ orthogonal} \wedge S' \supset S] \implies S' = S)$.
- (4) S **vollständiges Orthonormalsystem**
 $:\iff S$ vollständiges Orthogonalsystem und S orthonormal.

Bemerkungen:

- (a) S orthonormal $\implies (S \text{ vollständiges OS} \iff \forall x \in E: (x \perp S \implies x = 0))$
- (b) S orthonormal $\implies S$ linear unabhängig⁹

- **Beispiel 5.15:**

- (1) Für $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ ist $\{e_k: k = 1, \dots, n\}$ ein vollständiges ONS.

- (2) Für $L_{\mathbb{R}}^2([-\pi, \pi])$ mit $\langle x, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt$ ist ein vollständiges ONS etwa

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt) \mid k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt) \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (3) Für $L_{\mathbb{C}}^2([-\pi, \pi])$ mit $\langle x, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}dt$ ist ein vollständiges ONS etwa

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(int) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- **Satz 5.16 [Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt]:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ höchstens abzählbar und linear unabhängig. Dann existiert ein höchstens abzählbares Orthonormalsystem $S = \{u_1, u_2, \dots\}$, so dass für alle zulässigen n gilt

$$u_n \in \text{span}\{x_1, \dots, x_n\} \quad \wedge \quad x_n \in \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}.$$

Zusatzaufgabe 5.1: (a) Zeigen Sie **Satz 5.9**.

- (b) Zeigen Sie, dass in einem Innenproduktraum $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ über $\mathbb{R}$ gelten:

- (i) $\forall x, y \in E: (\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \implies x \perp y)$,
- (ii) $\forall x, y \in E: (x \perp y \iff \|x + y\| = \|x - y\|)$.

- (c) Zeigen Sie, dass die Aussagen aus (b) nicht in einem Innenproduktraum $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ über $\mathbb{C}$ gelten.

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.1:

⁹D.h., $\forall n \in \mathbb{N} \forall u_1, \dots, u_n \in S$ paarweise verschieden ist $\{u_1, \dots, u_n\}$ linear unabhängig

- (a) (1) Da in reellen Innenprodukträumen $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ für beliebige x, y gilt, folgt die Behauptung aus der Subtraktion der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 &= \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right\rangle = \frac{1}{4} \langle x, x \rangle + \frac{1}{4} \langle x, y \rangle + \frac{1}{4} \langle y, x \rangle + \frac{1}{4} \langle y, y \rangle . \\ \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 &= \left\langle \frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2} \right\rangle = \frac{1}{4} \langle x, x \rangle - \frac{1}{4} \langle x, y \rangle - \frac{1}{4} \langle y, x \rangle + \frac{1}{4} \langle y, y \rangle .\end{aligned}$$

- (2) Mit $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ folgt die Behauptung nach Addition der oberen beiden und der nachfolgenden beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}i \left\| \frac{x+iy}{2} \right\|^2 &= i \left\langle \frac{x+iy}{2}, \frac{x+iy}{2} \right\rangle = \frac{1}{4} i \langle x, x \rangle + \frac{1}{4} \langle x, y \rangle - \frac{1}{4} \langle y, x \rangle - \frac{1}{4} i \langle y, y \rangle . \\ -i \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|^2 &= -i \left\langle \frac{x-iy}{2}, \frac{x-iy}{2} \right\rangle = -\frac{1}{4} i \langle x, x \rangle + \frac{1}{4} \langle x, y \rangle - \frac{1}{4} \langle y, x \rangle + \frac{1}{4} i \langle y, y \rangle .\end{aligned}$$

- (b) (i) In reellen Innenprodukträumen gilt

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 ,$$

so dass aus $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ somit $\langle x, y \rangle = 0$, also $x \perp y$ folgt.

- (ii) In reellen Innenprodukträumen gilt

$$\begin{aligned}\|x+y\| = \|x-y\| &\iff \|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 \iff \langle x+y, x+y \rangle = \langle x-y, x-y \rangle \\ &\iff \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle ,\end{aligned}$$

was zu $4\langle x, y \rangle = 0$ und somit wie behauptet äquivalent zu $x \perp y$ ist.

- (c) (i) Betrachten wir dagegen den $\mathbb{C}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$, sowie

$x = e$ und $y = ie$ mit einem beliebigen Einheitsvektor, so folgt $\|x+y\|^2 = 2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ einerseits, jedoch $\langle x, y \rangle = -i$ sowie $\langle y, x \rangle = i$, also $\neg(x \perp y)$ andererseits.

- (ii) Die Beispielvektoren aus (i) erfüllen ebenso $\|x+y\| = \sqrt{2} = \|x-y\|$, obwohl $\neg(x \perp y)$ gilt.

Zusatzaufgabe 5.2:

Orthogonalisieren Sie nach dem Verfahren von Schmidt die Polynome $1, t, t^2 \in \mathcal{L}_\omega^2([-1, 1], \mathbb{R})$ mit $\omega(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$, d.h., bezüglich des (gewichteten) Innenproduktes

$$\langle x, y \rangle := \int_{-1}^1 x(t) \overline{y(t)} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt .$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 5.2: Die ersten drei (Tschebyscheff'schen) Polynome lauten:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} , \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} t , \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(t^2 - \frac{1}{2} \right) ,$$

denn es gelten einerseits

$$\begin{aligned}\|1\|^2 &= \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{t=\sin(\alpha)}{=} \pi \implies \boxed{u_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}} , \\ \langle 1, t \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \implies u_1 \perp t , \\ \|t\|^2 &= \langle t, t \rangle = \int_{-1}^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = - \int_0^1 \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} \cdot t dt \\ &\stackrel{\text{p.I.}}{=} - \left[2t\sqrt{1-t^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{1-t^2} dt \right] = 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \varphi + \sin(\varphi) \cos(\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \implies \boxed{u_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t} .\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass sich mit Substitutionsregel einerseits

$$\int_a^b \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{1-a^2}^{1-b^2} \frac{1}{\sqrt{s}} ds = 2\sqrt{s} \Big|_{1-a^2}^{1-b^2} = 2\sqrt{1-t^2} \Big|_a^b = \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2}$$

sowie andererseits

$$\int_a^b \sqrt{1-t^2} dt = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} (\cos(\varphi))^2 d\varphi = \frac{1}{2} (\varphi + \sin(\varphi) \cos(\varphi)) \Big|_{\arcsin a}^{\arcsin b} \quad (5.4)$$

ergibt, wobei $\int (\cos(\alpha))^2 d\alpha = \frac{1}{2} (\alpha + \sin(\alpha) \cos(\alpha))$ mittels partieller Integration und Umstellen folgt. Andererseits erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} \langle 1, t^2 \rangle &= \langle t, t \rangle = \|t\|^2 = \frac{\pi}{2} \implies \langle u_1, t^2 \rangle u_1 = \frac{1}{2}, \\ \langle t, t^2 \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \implies u_2 \perp t^2, \end{aligned}$$

schließlich

$$h_2 = t^2 - \langle u_1, t^2 \rangle u_1 - 0 = t^2 - \frac{1}{2}$$

und mit

$$\begin{aligned} \langle h_2, h_2 \rangle &= \left\langle t^2 - \frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2} \right\rangle = 2 \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt - 2 \underbrace{\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt}_{= \|t\|^2 = \frac{\pi}{2} \text{ s.v.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt}_{= \left\| \frac{1}{2} \right\|^2 = \frac{\pi}{4} \text{ s.v.}} \\ &= -\frac{\pi}{4} - \left[\int_0^1 \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} \cdot t^3 dt \right] = -\frac{\pi}{4} - \underbrace{2t^3 \sqrt{1-t^2} \Big|_0^1}_{=0} - 3 \int_0^1 t \cdot (-2t) \sqrt{1-t^2} dt \\ &= -\frac{\pi}{4} - 3 \underbrace{\left(\frac{2}{3} t \sqrt{(1-t^2)^3} \right) \Big|_0^1}_{=0} - \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)^3} dt = -\frac{\pi}{4} - 3 \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{(1-t^2)^3} dt &= \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} (\cos(\varphi))^4 d\varphi = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} (\cos(\varphi))^3 \cdot \cos(\varphi) d\varphi \\ &= -\sin(\varphi)(\cos(\varphi))^3 \Big|_{\arcsin a}^{\arcsin b} - 3 \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} (\sin(\varphi))^2 (\cos(\varphi))^2 d\varphi \\ &= -\sin(\varphi)(\cos(\varphi))^3 \Big|_{\arcsin a}^{\arcsin b} - 3 \left(\int_{\arcsin a}^{\arcsin b} (\cos(\varphi))^2 d\varphi - \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos(\varphi)^4 d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin(\varphi)(\cos(\varphi))^3 + \frac{3}{4} (\varphi + \sin(\varphi) \cos(\varphi)) \Big|_{\arcsin a}^{\arcsin b} \end{aligned}$$

verwendet haben (im letzten Schritt wurde wieder umgestellt und (5.4) beachtet).

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 6

Gaußsche und allgemeine Approximationsaufgabe – vgl. Kapitel 5, Abschnitt 5.3

- **Definition 5.17** [Approximationsaufgaben]:

- (1) Gegeben seien $(E, \|\cdot\|)$, $\emptyset \neq F \subset E$, $x \in E$. Ein $y_0 \in F$ heißt **Element bester Approximation** für x , falls

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in F} \|x - y\|. \quad (6.1)$$

Die Frage nach der Existenz eines solchen $y_0 \in F$ nennen wir **allgemeine Approximationsaufgabe**.

- (2) Wir sprechen von der **Gaußschen Approximationsaufgabe**, falls zusätzlich F ein endlich-dimensionaler Unterraum von E und $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum ist.

- **Satz 5.18:**

- (1) Die Gaußsche Approximationsaufgabe ist eindeutig lösbar.
(2) Ist $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ orthonormal mit $F = \text{span}(S)$, dann ist zu jedem $x \in E$ das eindeutig bestimmte Element bester Approximation gegeben durch

$$y_0 := \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k \quad (6.2)$$

- (3) y_0 ist Orthogonalprojektion von x auf F .

- **Bemerkung 5.19:**

- (a) Es gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\forall x \in E: \sum_{k=1}^n |\langle x, u_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad (6.3)$$

- (b) Es gilt $x - y_0 \perp F$.

- (c) Aufgrund der Eindeutigkeit von y_0 lässt sich jedes $x \in E$ eindeutig darstellen als $x = u + v$ mit $u = y_0 \in F$ und $v = x - y_0 \in F^\perp$, denn es gilt $F \cap F^\perp = \{0\}$ und $E = F \oplus F^\perp$.

- **Satz 5.20:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, $K \subset E$, $K \neq \emptyset$ konvex¹⁰ und vollständig¹¹ sowie $x \in E$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $y_0 \in K$ mit

$$\|x - y_0\| \leq \min_{y \in K} \|x - y\|. \quad (6.4)$$

- **Satz 5.21:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, F ein beliebiger linearer Unterraum von E und $x \in E$. Besitzt das Minimierungsproblem

$$\min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - y_0\|$$

eine Lösung $y_0 \in F$, so ist diese Lösung eindeutig und es gilt $x - y_0 \perp F$.

- **Satz 5.22:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, F ein vollständiger linearer Unterraum von E .¹² Dann existieren für alle $x \in E$ eindeutig bestimmte $u, v \in E$, $u \in F$, $v \in F^\perp$ und $x = u + v$, d.h., es gilt $E = F \oplus F^\perp$.

¹⁰D.h., $\forall x, y \in K: \{\alpha x + (1 - \alpha)y \mid \alpha \in [0, 1]\} \subset K$.

¹¹als metrischer Raum mit der norm- bzw. vom Skalarprodukt induzierten Metrik $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$

¹²Die Voraussetzungen sind etwa erfüllt, wenn $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sogar ein Hilbert-Raum und F ein abgeschlossener linearer Unterraum ist, da abgeschlossene Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes selbst wieder vollständig sind.

• **Bemerkung 5.23:**

- (a) Falls $E = F \oplus F^\perp$, so gilt $(F^\perp)^\perp = F$. (b) Falls $E = F \oplus F^\perp$, so ist F abgeschlossen.

• **Definition 5.24:**

- (a) Falls $E = F \oplus F^\perp$ gilt, so sagen wir, dass F in E ein **orthogonales Komplement** besitzt.
 (b) Gilt $E = F \oplus F^\perp$, d.h., existiert für jedes $x \in E$ genau ein $u \in F$ und genau ein $v \in F^\perp$ mit $x = u + v$, so nennen wir die Abbildung $P: E \rightarrow F$, definiert durch $Px := u$, die **orthogonale Projektion** von E auf F .
 (c) Wir nennen einen linearen Operator $A: E \rightarrow E$ **symmetrisch**, wenn

$$\forall x, y \in E: \langle Ax|y \rangle = \langle x|Ay \rangle. \quad (6.5)$$

- (d) Eine lineare Abbildung $P: E \rightarrow E$ heißt **Projektor**, falls $P^2 = P$ gilt.

• **Satz 5.25:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum. Dann gilt:

- (a) Jede orthogonale Projektion ist symmetrisch und besitzt – sofern sie ungleich der Nullabbildung ist – Norm 1.
 (b) Ist $P: E \rightarrow E$ ein symmetrischer Projektor, so ist P eine orthogonale Projektion.

• **Satz 5.26 [Lösbarkeit der Approximationsaufgabe für vollständigen UR eines IPR]:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, $F \subset E$ ein vollständiger Unterraum, sowie P die orthogonale Projektion von E auf F . Dann ist $Px = u$ die Bestapproximation von x in F , d.h., es gilt

$$\forall y \in F: \|x - Px\| = \|x - y\|. \quad (6.6)$$

Zusatzaufgabe 6.1:

- (a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilräume von ℓ^2 ein orthogonales Komplement besitzen:

$$(i) F = \{x \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}: x(2n) = 0\}; \quad (ii) G = \left\{x \in \ell^2 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n x(n) = 0\right\}.$$

- (b) Sei $\mathbb{P}$ der lineare Raum aller Polynome. Für die lineare bijektive Abbildung

$$I: \mathbb{P} \rightarrow \ell^2, p = \sum_{k=1}^n \alpha_k t^k \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots) \in \ell^2$$

betrachten wir den linearen Unterraum $\tilde{\mathbb{P}} := I(\mathbb{P})$ des ℓ^2 .

- (i) Gilt $\ell^2 = \tilde{\mathbb{P}} \oplus \tilde{\mathbb{P}}^\perp$? (ii) Ist $(\tilde{\mathbb{P}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2})$ vollständig? (iii) Was besagt Satz 5.22 hier?

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.1:

- (a) (i) Es ist $F^\perp = \{x \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}: x(2n-1) = 0\}$, somit folgt $F \oplus F^\perp = \ell^2$.
 (ii) Sei $e_n(k) = \delta_{n,k} \in G$ (das Kronecker-Delta). Sei $x \in G^\perp$. Es folgt $x = 0$, da $\forall n \in \mathbb{N} x(n) = \langle x, e_n \rangle = 0$. Aber offensichtlich $\ell^2 \neq G \oplus \{0\} = G$. (z.B. mit $z(n) = \frac{1}{n}$ gilt $\ell^2 \ni z \notin G$)
 (b) (i) Es ist $\tilde{\mathbb{P}}^\perp = \{0\}$, denn gäbe es ein $x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ mit $x \in \tilde{\mathbb{P}}^\perp$ und $x \neq 0 \in \ell^2$, so existierte mindestens ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x(n_0) \neq 0$, so dass für $I(t^{n_0}) \in \tilde{\mathbb{P}}$ somit $\langle x, I(t^{n_0}) \rangle = x(n_0) \cdot 1 \neq 0$ folgte, im Widerspruch zu $x \in \tilde{\mathbb{P}}^\perp$. Da $\tilde{\mathbb{P}}$ jedoch nur abbrechende Folgen enthält, gilt offenbar $\tilde{\mathbb{P}} \oplus \tilde{\mathbb{P}}^\perp = \tilde{\mathbb{P}} \neq \ell^2$.
 (ii) Betrachte in $\tilde{\mathbb{P}}$ die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k(n) = 2^{-n}$ für $n \leq k$ und $x_k(n) = 0$ sonst, dann konvergiert diese Folge offenbar in $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2})$ gegen $x_g \in \ell^2$ mit $\forall n \in \mathbb{N}: x(n) = 2^{-n}$, somit ist $x_g \notin \tilde{\mathbb{P}}$ ein Berührungspunkt von $(\tilde{\mathbb{P}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2})$, letzterer also kein abgeschlossener linearer Unterraum, also kann $(\tilde{\mathbb{P}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2})$ nach ZA 2.2 (a) nicht vollständig sein.

- (iii) Nach Satz 5.22 besitzt jeder vollständige lineare Unterraum von $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2})$ ein orthogonales Komplement in $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2})$, also kann $(\tilde{\mathbb{P}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2})$ nach (i) nicht mehr vollständig sein.

Zusatzaufgabe 6.2: Zeigen Sie (a) die **Besselsche Ungleichung** (6.3). (b) den **Satz 5.25 (a)**.

- (c) Sei E ein Innenproduktraum, $(x_n)_n$ eine Folge aus E und $x \in E$. Zeigen Sie, dass $x_n \rightarrow x$ genau dann gilt, wenn $\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$ und $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.2:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) Es gilt} \quad 0 &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k, x - \sum_{j=1}^n \langle x, u_j \rangle u_j \right\rangle \\
 &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle \underbrace{\langle u_k, x \rangle}_{=\langle x, u_k \rangle} - \sum_{j=1}^n \overline{\langle x, u_j \rangle} \langle x, u_j \rangle + \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle \sum_{j=1}^n \overline{\langle x, u_j \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{j,k}} \\
 &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, u_k \rangle|^2 \quad \implies \quad \sum_{k=1}^n |\langle x, u_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2
 \end{aligned}$$

- (b) Sei $P: E \rightarrow E$ eine orthogonale Projektion von E auf F . Seien $x, y \in E$ beliebig und $u, u' \in F$ sowie $v, v' \in F^\perp$ mit $x = u + v$ und $y = u' + v'$. Dann ist P symmetrisch aufgrund von

$$\langle Px, y \rangle = \langle u, u' + v' \rangle = \langle u, u' \rangle = \langle u + v, u' \rangle = \langle x, Py \rangle.$$

Nach Satz 5.12 (Pythagoras) folgt zunächst $\|P\| \leq 1$ aufgrund von

$$\|Px\|^2 = \|u\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2 = \|x\|^2.$$

Falls $P \neq 0$, also $F \neq \{0\}$, so existiert ein $u_0 \in F \setminus \{0\}$ mit $\|Pu_0\| = \|u_0\|$. Damit ist in der Tat $\|P\| = 1$.

- (c) Wenn $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$, so folgt $\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$ und $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ jeweils aufgrund der Stetigkeit des Innenproduktes. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
 \|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x \rangle = \langle x_n, x_n \rangle - \langle x_n, x \rangle - \langle x, x_n \rangle + \langle x, x \rangle \\
 &= (\|x_n\|^2 - \|x\|^2) + (\langle x, x \rangle - \langle x_n, x \rangle) + (\overline{\langle x, x \rangle} - \overline{\langle x_n, x \rangle}) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, da insbesondere $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \in \mathbb{R}$.

Zusatzaufgabe 6.3:

Welche der folgenden Mengen sind konvex?

$$(a) \ C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$(b) \ \mathbb{T}_n := \left\{ f \in L^2([0, 1]) \mid \begin{array}{l} \exists a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, k \in \{1, \dots, n\}: \\ f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)) \end{array} \right\}$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 6.3:

- (a) Es ist C nicht konvex, da $\lambda x + (1 - \lambda)y = (0, 0) \notin C$ für $x = (2, 0) \in C$ und $y = (-2, 0) \in C$ sowie mit $\lambda = \frac{1}{2}$ folgt.
- (b) Es handelt sich bei $\mathbb{T}_n$ um einen linearen Raum der Dimension $2n + 1$. Lineare Räume haben die Eigenschaften, dass sie mit zwei Elementen auch jede Linearkombination, also insbesondere auch jede konvexe Linearkombination enthalten, also stets konvex sind. Somit ist $\mathbb{T}_n$ konvex.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 7

Darstellungssatz von Fréchet-Riesz – vgl. Kapitel 5, Abschnitt 5.4

- **Beispiel 5.27:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, $z \in E$ fest gewählt und $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ definiert durch $x \mapsto \langle x, z \rangle$. Dann ist f einerseits linear und aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung stetig über

$$\forall x \in E: |f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \cdot \|z\|.$$

Insbesondere folgt wegen $|f(z)| = \|z\|^2$ dann auch $\|f\| = \|z\|$.

- **Definition 5.28:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$.

- Wir nennen $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ eine **Linearform** bzw. **lineares Funktional**.
- Den Raum der linearen Funktionale

$$E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \{f: E \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ linear und stetig}\} \quad (7.1)$$

nennen wir den **Dualraum** von E . Dieser wird mit der üblichen Operatornorm

$$\|f\|_{E'} := \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (7.2)$$

zu einem normierten Raum $(E', \|\cdot\|_{E'})$.

- **Satz 5.29 [Darstellungssatz von Fréchet-Riesz]:**

Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Dann gilt:

$$\forall f \in E' \exists! z_f \in E \quad \text{mit} \quad \forall x \in E: f(x) = \langle x, z_f \rangle.$$

Weiter gilt dann $\|f\|_{E'} = \|z_f\|_E$.

- **Korollar 5.30:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Dann ist $\Gamma: E \rightarrow E', z \mapsto f_z$ mit $f_z: E \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \langle x, z \rangle$ normerhaltend, bijektiv und antilinear¹³
- **Satz 5.31:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum. Dann wird E' mit dem Innenprodukt

$$\langle f, g \rangle_{E'} := \langle z_f, z_g \rangle$$

zu einem Hilbertraum $(E', \langle \cdot, \cdot \rangle_{E'})$. Insbesondere gilt $\|f\|_{E'} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{E'}}$ mit $\|\cdot\|_{E'}$ aus (7.2).

- **Definition/Bemerkung 5.32:** Sei $\Gamma: E \rightarrow E'', x \mapsto \mathcal{F}_x$ mit $\forall f \in E': \mathcal{F}_x(f) = f(x)$ (denn es gilt $\forall x \in E: \mathcal{F}_x$ linear und stetig mit $\|\mathcal{F}_x\|_{E''} \leq \|x\|_E$), dann ist Γ injektiv wegen $\ker \gamma = \{0\}$ (Beweis nach Hahn-Banach). Wir nennen nun E **reflexiv** genau dann, wenn Γ surjektiv ist.¹⁴
- **Satz 5.33:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum. Dann ist E reflexiv.

Orthogonalreihen – vgl. Kapitel 5

- **Satz 5.35:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum, $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$ orthonormal sowie $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{K}$. Dann gelten:

$$(a) \quad \text{Es ist } \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n u_n \text{ in } (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E) \text{ konvergent} \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

¹³d.h., $\forall z \in E \forall \alpha \in \mathbb{K}: (\Gamma(z + \tilde{z}) = \Gamma(z) + \Gamma(\tilde{z}) \wedge \Gamma(\alpha z) = \bar{\alpha} \Gamma(z))$.

¹⁴Beachte: E reflexiv $\Rightarrow E \cong E''$, aber $E \cong E'' \not\Rightarrow E$ reflexiv

$$(b) \quad \forall x \in E: x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, u_n \rangle_E|^2 = \langle x, x \rangle_E$$

$$(c) \quad \text{Gilt } \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n u_n = x \text{ in } (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E), \text{ so folgt } \forall n \in \mathbb{N}: \alpha_n = \langle x, u_n \rangle_E.$$

$$(d) \quad \text{Gilt } \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n u_n = x \text{ in } (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E), \text{ so folgt für alle bijektiven Abbildungen } \beta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ ebenfalls}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{\beta(n)} u_{\beta(n)} = x \text{ in } (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E).$$

- **Satz 5.36:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum, $S \subset E$ ein Orthonormalsystem. Dann ist für alle $x \in E$ die Teilmenge

$$S_0 := S_0(x) := \{u \in S \mid \langle x, u \rangle_E = 0\} \quad (7.3)$$

höchstens abzählbar. Weiter gilt

$$\sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle_E|^2 = \sum_{u \in S_0} |\langle x, u \rangle_E|^2 \leq \|x\|_E^2 \quad (7.4)$$

- **Satz 5.37:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum, $S \subset E$ ein (beliebiges) Orthonormalsystem. Dann existiert für jedes $x \in E$ ein $z \in E$, so dass die Reihe

$$\sum_{u \in S} \langle x, u \rangle_E u$$

bei beliebiger Anordnung in $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ gegen z konvergiert. Weiter gelten

$$(a) \quad z = x \Longleftrightarrow \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle_E|^2 = \|x\|_E^2$$

$$(b) \quad (x - z) \perp \overline{(\text{span } S)} \text{ und} \quad (c) \quad \overline{(\text{span } S)} = \left\{ \sum_{u \in S} \langle y, u \rangle_E u \mid y \in E \right\} =: M.$$

- **Definition 5.38:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Innenproduktraum, $S \subset E$ ein Orthonormalsystem.

(a) Dann heißen die Zahlen $\langle x, u \rangle_E$ für $u \in S$ die **Fourier-Koeffizienten** von x bzgl. S .

(b) Es heißt $S \subset E$ eine **Orthonormalbasis** von E , wenn gilt:¹⁵

(1) S ist ein Orthonormalsystem

$$(2) \quad \forall x \in E: \left(\sum_{u \in S} \langle x, u \rangle_E u \text{ konvergiert} \wedge \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle_E u = x \right).$$

(c) Wir nennen E **separabel** $:\Longleftrightarrow \exists M \subset E: M$ abzählbar und dicht in E .

- **Korollar 5.39:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum, $S \subset E$ ein (beliebiges) Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:

(a) S ist Orthonormalbasis von E .

(b) $E = \overline{(\text{span } S)}$.

(c) Es gilt die **Parsevalsche Gleichung**

$$\forall x \in E: \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle_E|^2 = \|x\|_E^2. \quad (7.5)$$

- **Satz 5.40:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum, $S \subset E$. Dann gilt:

$$S \text{ Orthonormalbasis von } E \quad \Longleftrightarrow \quad S \text{ vollständiges ONS von } E.$$

¹⁵Achtung: Dieser Begriff stimmt für unendlich-dimensionale Räume NICHT mit dem aus der linearen Algebra bekannten Begriff der Orthonormalbasis überein.

• **Satz 5.41:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Innenproduktraum, $E \neq \{0\}$. Dann gilt:

- (a) $\exists S \subset E$: S vollständiges ONS von E
- (b) Zu jedem ONS $S_0 \subset E$ existiert ein vollständiges ONS S mit $S_0 \subset S$.

• **Satz 5.42:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum unendlicher Dimension. Dann gilt

$$E \text{ separabel} \iff E \text{ besitzt abzählbare ONB}.$$

Zusatzaufgabe 7.1:

- (a) Beweisen Sie **Satz 5.29 [Darstellungssatz von Fréchet-Riesz]**
- (b) Zeigen Sie **Satz 5.31 (b)**: $\forall f \in E': \langle f, f \rangle_{E'} = \|f\|^2$ (c) Zeigen Sie **Satz 5.33**.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.1:

- (a) • **Eindeutigkeit:** Angenommen, es gelte $\forall x \in E: f(x) = \langle x, z \rangle_E = \langle x, w \rangle_E$, so folgt auch $0 = \langle x, z - w \rangle_E$, also $(z - w) \perp E$, also $(z - w) \in E^\perp = \{0\}$, also $z = w$.
- **Existenz:**
 - (i) Für $f = 0 \in E'$ tut $z = 0 \in E$ das Gewünschte.
 - (ii) Für $f \neq 0 \in E'$ ist $F := \ker f$ abgeschlossener Unterraum von E , da f stetig wegen $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Da $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum ist, ist jeder abgeschlossene lineare Unterraum vollständig. Nach Satz 5.22 folgt dann $E = F \oplus F^\perp$. Da $f \neq 0 \in E'$, ist $F \neq E$, also $F^\perp \neq \{0\}$. Betrachten wir nun die Einschränkung von f auf $F^\perp$, also

$$g := f|_{F^\perp}$$

Dann ist g injektiv, denn für jedes $x_0 \in F^\perp \setminus \{0\}$ gilt $g(x_0) \neq 0 \in \mathbb{K}$. Ebenso ist $g: F^\perp \rightarrow \mathbb{K}$ surjektiv, da ungleich der Nullabbildung, also insbesondere auch bijektiv. Damit muss $F^\perp$ eindimensional, also $F^\perp = \text{span}\{x_0\}$ für ein $x_0 \in F^\perp \setminus \{0\}$ sein. Wegen $E = F \oplus F^\perp$ folgt nun

$$\forall x \in E \exists! \alpha \in \mathbb{K}, y \in F: x = \alpha x_0 + y.$$

Aufgrund der Linearität von f und – da $y \in \ker f = F$ ist – folgt daher

$$\forall x \in E: f(x) = \alpha f(x_0).$$

Setze nun $z = \beta x_0$ mit $\beta := \frac{\overline{f(x_0)}}{\|x_0\|_E^2} \in \mathbb{K}$. Dann folgt das Gewünschte wegen

$$f(x) = \alpha f(x_0) = \alpha \frac{f(x_0)}{\|x_0\|_E^2} \cdot \|x_0\|_E^2 = \alpha \overline{\beta} \langle x_0, x_0 \rangle = \alpha \langle x_0, \beta x_0 \rangle = \alpha \langle x_0, z \rangle = \langle x, z \rangle.$$

- (b) $\langle f, f \rangle_{E'} \stackrel{\text{Satz 5.31(a)}}{=} \langle z_f, z_f \rangle_E = \|z_f\|_E^2 \stackrel{\text{Bsp. 5.27}}{=} \|f\|_{E'}^2$
- (c) Sei $\mathcal{F} \in E''$. Da $(E', \langle \cdot, \cdot \rangle_{E'})$ ein Hilbertraum ist, folgt nach Satz 5.29 (Fréchet-Riesz) die Existenz eines eindeutigen $g_{\mathcal{F}} \in E'$, so dass für alle $f \in E'$ gilt

$$\mathcal{F}(f) \stackrel{\text{Satz 5.29}}{=} \langle f, g_{\mathcal{F}} \rangle_{E'} \stackrel{\text{Satz 5.31}}{=} \langle z_{g_{\mathcal{F}}}, z_f \rangle_E \stackrel{\text{Satz 5.29}}{=} f(z_{g_{\mathcal{F}}}).$$

Somit ist das $\Gamma: E \rightarrow E'', x \mapsto \mathcal{F}_x$ aus Definition 5.30 surjektiv, also ist $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ reflexiv.

Zusatzaufgabe 7.2:

(a) Zeigen Sie Theorem 4.9 ¹⁶:

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus L^p und sei $f \in L^p$ derart, dass $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann existiert eine Teilfolge $f_{n(k)} \in L^p$ und ein $h \in L^2$, so dass

$$(i) \quad f_{n(k)} \rightarrow f(x) \text{ für fast alle } x. \quad (ii) \quad \forall k \in \mathbb{N}: |f_{n(k)}| \leq |h(x)| \text{ für fast alle } x.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Behauptungen des letzten Satzes i.A. nicht für die gesamte Folge gilt.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.2:

(a) Die Behauptung ist offensichtlich, falls $p = \infty$. Sei also nun $1 \leq p < \infty$. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge bezüglich der $\|\cdot\|_p$ -Norm ist, finden wir eine Teilfolge $(f_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, so dass

$$\forall k \in \mathbb{N}: \|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\|_p \leq \frac{1}{2^k}.$$

Die durch

$$g_\ell(x) = \sum_{k=1}^{\ell} |f_{n(k+1)}(x) - f_{n(k)}(x)|$$

definierte Folge erfüllt dann einerseits

$$\|g_\ell\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{\ell} |f_{n(k+1)} - f_{n(k)}| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{\ell} \|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\|_p \leq \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

und konvergiert somit f.ü. nach dem Satz von Beppo-Levi (Satz von der monotonen Konvergenz) gegen einen endlichen Grenzwert $g \in L^2$. Andererseits haben wir für $\ell \geq m \geq 2$ die Abschätzung

$$|f_{n(\ell)}(x) - f_{n(m)}(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{\ell} |f_{n(k)}(x) - f_{n(k-1)}(x)| \geq g_\ell(x) - g_{m-1}(x) \geq g(x) - g_{m-1}(x)$$

Wegen $g_\ell(x) \rightarrow g(x)$ f.ü. folgt, dass auch $(f_{n(k)}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ für fast alle x eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist und somit punktweise fast überall gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Sei nun $\tilde{f}(x)$ dieser Grenzwert, dann folgt aus der letzten Ungleichungskette nach Grenzübergang $\ell \rightarrow \infty$ für fast alle x die Ungleichung

$$\forall m \geq 2: |\tilde{f}(x) - f_{n(m)}(x)| \leq g(x),$$

also insbesondere auch $\tilde{f} \in L^p$. Nach dem Satz von Lebesgue (Satz von der majorisierten Konvergenz) folgt nun auch $\|\tilde{f} - f_{n(m)}\|_p \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ wegen $|\tilde{f}(x) - f_{n(m)}(x)| \rightarrow 0$ f.ü. und $|\tilde{f} - f_{n(m)}|^p \leq g^p \in L^1$. Da einerseits konvergente Folgen nur einen Häufungspunkt besitzen und andererseits der Grenzwert eindeutig ist, folgt nun $f = \tilde{f}$ fast überall. Mittels umgekehrter Dreiecksungleichung erhalten wir nun auch $|f_{n(m)}(x)| \leq |\tilde{f}(x)| + g(x) =: h(x)$ für fast alle x .

(b) Betrachten wir mit $n = 2^k + j$ für $j = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$ etwa die Folge der Treppenfunktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}] , \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

also

$$f_1(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}, \quad f_2(x) = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}, \quad f_3(x) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]},$$

und weiter

$$f_4(x) = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{4}]}, \quad f_5(x) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]}, \quad f_6(x) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}, \quad f_7(x) = \mathbf{1}_{[\frac{3}{4}, 1]}, \quad \dots,$$

¹⁶Haim Brezis: Functional Analysis, Sobolev-Spaces and Partial Differential Equations

so sehen wir, dass einerseits offenbar

$$\|f_n\|_p^p = \int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} 1 \, dx = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 ,$$

also die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(L^p, \|\cdot\|_p)$ liegt und dort auch gegen die Nullfunktion konvergiert. Andererseits konvergiert diese spezielle Funktionenfolge nirgends auf $[0, 1]$ punktweise gegen die Nullfunktion, da die Funktionswerte für ausnahmslos jedes $x \in [0, 1]$ stets zwischen 0 und 1 oszillieren.

Zusatzaufgabe 7.3: Beweisen Sie Satz 5.40.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.3:

- „ $\Rightarrow$ “: Wir zeigen:

Ist $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ separabel und $S \subset E$ ein ONS, dann ist S höchstens abzählbar.

Da E nach Voraussetzung separabel ist, existiert eine höchstens abzählbare Teilmenge $M \subset E$ mit $\overline{M} = E$. Es gilt also

$$M = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{oder} \quad M = \{y_n \mid n = 1, \dots, m\} .$$

Insbesondere folgt $S \subset E = \bigcup_n D_n$ mit den offenen Kugeln $D_n := B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(y_n)$. Sind nun $u, v \in S \cap D_n$, so gilt einerseits

$$\|u - v\|_E \leq \underbrace{\|u - y_n\|_E}_{< \frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\|y_n - v\|_E}_{< \frac{\sqrt{2}}{2}} < \sqrt{2} .$$

Andererseits gilt für alle $u, v \in S$ mit $u \neq v$ schon $\|u - v\|_E^2 = \langle u, u \rangle_E + \langle v, v \rangle_E = 2$, also $\|u - v\|_E = \sqrt{2}$. Somit kann für jedes n in $S \cap D_n$ maximal ein Element enthalten sein. Also ist S höchstens abzählbar.

- „ $\Leftarrow$ “: Sei $S \subset E$ eine abzählbare ONB von E , d.h., $S = \{u_n \in E \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Menge

$$M_m := \left\{ \sum_{n=1}^m q_n u_n \mid \operatorname{Re}(q_n), \operatorname{Im}(q_n) \in \mathbb{Q} \right\}$$

abzählbar ist, ist auch $M := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_m$ abzählbar. Sei nun $\varepsilon > 0$ und $x \in E$ beliebig. Nach Definition einer Orthonormalbasis existiert dann ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left\| x - \sum_{n=1}^m \langle x, u_n \rangle_E u_n \right\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, existieren q_n mit $\operatorname{Re}(q_n), \operatorname{Im}(q_n) \in \mathbb{Q}$, so dass

$$\forall n = 1, \dots, m: |q_n - \langle x, u_n \rangle_E| < \frac{\varepsilon}{2m} .$$

Insgesamt folgt somit

$$\left\| x - \sum_{n=1}^m q_n u_n \right\|_E \leq \underbrace{\left\| x - \sum_{n=1}^m \langle x, u_n \rangle_E u_n \right\|_E}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{n=1}^m \underbrace{|\langle x, u_n \rangle_E - q_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2m}} \underbrace{\|u_n\|_E}_{=1} < \varepsilon .$$

Also gilt $\overline{M} = E$, d.h., $M \subset E$ ist auch dicht in E .

Zusatzaufgabe 7.4:**(Separabilität)**

- (a) Finden Sie Metriken d_1, d_2 auf $\mathbb{R}$, so dass $(\mathbb{R}, d_1)$ separabel, jedoch $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht separabel ist.
- (b) Zeigen Sie, dass jeder Unterraum eines separablen metrischen Raumes wieder separabel ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 7.4:

- (a)
- Es ist $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ separabel, weil $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Teilmenge ist, welche in diesem Raum dicht liegt, da jede reelle Zahl in einer Kugel $B_\varepsilon(q)$ mit einem geeigneten $q \in \mathbb{Q}$ enthalten ist bzw. da in diesem Raum $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ gilt.
 - Es ist $(\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ nicht separabel, da jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ in diesem Raum abgeschlossen ist. Somit ist $\mathbb{R}$ hier die einzige Menge, für welche $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}}$ gilt, jedoch ist $\mathbb{R}$ bekanntermaßen nicht abzählbar.
- (b) Sei (E, d_E) ein beliebiger separabler metrischer Raum. Dann existiert eine höchstens abzählbare Teilmenge $M \subseteq E$ mit $\overline{M} = E$. Sei weiterhin $(F, d_{E|F})$ ein beliebiger Unterraum¹⁷ von E . Für alle $y \in F$ und alle $n \in \mathbb{N}$ existiert nun ein $x = x_{y,n} \in M$ mit $d(y, x_{y,n}) \leq \frac{1}{n}$. Damit definieren wir für jede natürliche Zahl n die Menge $M_n := \{x_{y,n} \in M \mid y \in F\}$. Wegen $x_{y,n} \in M$ muss zwangsläufig $M_n \subseteq M$ für alle n gelten, woraus man wiederum schlussfolgern kann, dass sämtliche M_n höchstens abzählbar sind und damit in der Form $M_n = \{m_{n,1}, m_{n,2}, m_{n,3}, \dots\}$ geschrieben werden können. Nach Konstruktion der Mengen gibt es nun zu jedem $m_{n,k} \in M$ ein $y_{n,k} \in F$ mit $d(y_{n,k}, m_{n,k}) < \frac{1}{n}$. Fassen wir nun sämtliche derartige $y_{n,k} \in F$ zusammen – bilden also die Menge $D := \{y_{n,k} \mid n, k = 1, 2, \dots\}$ – so ergibt dies wiederum eine höchstens abzählbare Menge¹⁸, welche in F enthalten ist. Außerdem ist D dicht in F , denn:
- Sei $y \in F$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert zunächst ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. In M_n finden wir nun (aufgrund der Konstruktion von M_n) ein Element $x \in M_n \subseteq M$ mit $d(y, x) \leq \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Zu diesem $x \in M_n$ wiederum existiert ein $y_{n,k} \in D$ mit $d(x, y_{n,k}) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt also

$$d(y, y_{n,k}) \leq d(y, x) + d(x, y_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

¹⁷In metrischen Räumen ist ein Unterraum lediglich eine Teilmenge, versehen mit der Einschränkung der Metrik des Oberraumes auf diese Teilmenge

¹⁸Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar. (Beweis: Diagonalverfahren)

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 8

Bairescher Kategoriensatz – vgl. Kapitel 6

- **Definition 6.1:** Sei (E, d) ein metrischer Raum, $M \subset E$, $M \neq \emptyset$. Dann definieren wir

$$\text{diam}(M) := \sup_{x, y \in M} d(x, y) . \quad (8.1)$$
- **Satz 6.2 [Cantor]:** Sei (E, d) ein vollständiger metrischer Raum, $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener nichtleerer Teilmengen von E mit $\forall n: F_n \supset F_{n+1}$ und $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann enthält $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ genau ein Element.
- **Lemma 6.3:** Sei (E, d) ein metrischer Raum, $F \subset E$, $\text{Int}(F) = \emptyset$, $K \subset E$ abgeschlossene Kugel, F abgeschlossen. Dann gibt es eine abgeschlossene Kugel $K' \subset K$ mit $K' \cap F = \emptyset$.
- **Satz 6.4 [Baire]:** Sei (E, d) ein vollständiger metrischer Raum, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von E , $G \subset E$ offen, $G \neq \emptyset$,

$$G \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n .$$

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass F_{n_0} ein nichtleeres Inneres besitzt.¹⁹

- **Korollar 6.5:** Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein unendlich-dimensionaler Banach-Raum über $\mathbb{K}$, dann ist jede Basis von E überabzählbar.
- **Definition 6.6:**

- (a) Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein unendlich-dimensionaler normierter Raum über $\mathbb{K}$, dann nennen wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus E eine **Schauderbasis**, falls

$$\forall x \in E \exists! (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} : x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \quad \text{wobei} \quad s_k := \sum_{n=1}^k \lambda_n x_n .$$

Bem.: Zur Abgrenzung wird die Basis im Sinne der linearen Algebra manchmal auch Hamelbasis genannt.

- (b) Sei (E, d) ein metrischer Raum, $S \subset E$ beliebig.

- (i) S heißt **Menge 1. Kategorie** in (E, d)

$$:\Longleftrightarrow \exists (F_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N}: (F_n \subset E \text{ abgeschlossen} \wedge \text{Int } F_n = \emptyset) \text{ und } S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n .$$

- (ii) S heißt **Menge 2. Kategorie** in (E, d) , falls S keine Menge 1. Kategorie ist.

- **Bemerkung 6.7:**

- (a) Der Satz von Baire besagt, dass offene nichtleere Mengen in vollständigen metrischen Räumen Mengen 2. Kategorie sind.
- (b) Letzteres impliziert, dass Mengen 1. Kategorie ein leeres Inneres besitzen.

Zusatzaufgabe 8.1:

- (a) Entscheiden Sie, ob folgende Mengen von 1. oder 2. Kategorie sind: (i) $\mathbb{Q}$ (ii) $\mathbb{R}$ (iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- (b) Gibt es eine Menge, die dicht in einer anderen liegt, deren Komplement jedoch auch dicht ist?

¹⁹Äquivalente Formulierung: Sei (E, d) vollständig, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $\forall n \in \mathbb{N}: F_n \subset E$ abgeschlossen und $\text{Int } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Dann gilt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \text{Int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.1:

- (a) (i) $\mathbb{Q}$ ist eine Menge 1. Kategorie, da es eine geeignete abzählbare Überdeckung (nämlich $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$) gibt.
(ii) $\mathbb{R}$ ist eine Menge 2. Kategorie, da vollständig (vgl. Bemerkung 6.7).
(iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist eine Menge 2. Kategorie, denn wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine Menge 1. Kategorie, dann auch $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}$, Widerspruch.
- (b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind beide dicht, jedoch ist letztere mächtiger.

Zusatzaufgabe 8.2:

Es seien $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum und $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter Raum. $(A_{m,n})_{m,n}$ sei eine Doppelfolge stetiger, linearer Operatoren $A_{m,n}: E \rightarrow F$. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ existiere ein $x_m \in E$, so dass die Folge $(\|A_{m,n}x_m\|_F)_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ unbeschränkt ist.

Zeigen Sie: Es existiert ein $x_0 \in E$ derart, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ $(\|A_{m,n}x_0\|_F)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 8.2:

Angenommen, ein derartiges x_0 existiere nicht.

- Dann gilt

$$\forall x \in E \exists m(x): (\|A_{m(x),j}x\|_F)_{j \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \quad (8.2)$$

- Betrachten wir nun die Mengen

$$F_{m,k} := \{x \in E \mid \|A_{m,j}x\|_F \leq k, \forall j \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x \in E \mid \|A_{m,j}x\|_F \leq k\}, \quad (8.3)$$

welche jeweils als abzählbare Durchschnitte abgeschlossener Mengen (nämlich der Urbilder der abgeschlossenen Mengen $[0, k]$ unter den stetigen Abbildungen $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)} \circ A_{m,j}$) selbst wieder abgeschlossen sind.

- Offenbar gilt

$$E = \bigcup_{m,k \in \mathbb{N}} F_{m,k}, \quad (8.4)$$

so dass aufgrund der Abgeschlossenheit der $F_{m,k}$ und der vorausgesetzten Vollständigkeit von $(E, \|\cdot\|_E)$ nach dem Satz von Baire $m_0 \in \mathbb{N}$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass F_{m_0,k_0} eine Kugel K enthält.

- Es folgt:

$$\forall x \in K \forall n \in \mathbb{N}: \|A_{m_0,n}x\|_F \leq k_0 \quad (8.5)$$

- Analog zum Beweis eines Satzes aus der Vorlesung folgt nun die Existenz eines β , so dass nun auch die Operatornormen für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils $\|A_{m_0,n}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \beta$ erfüllen, denn:

- Ist etwa $K = K(x_0, r)$, also $x = x_0 + ry \in K$ für beliebiges $y \in E$ mit $\|y\|_E \leq 1$, so erhalten wir aufgrund der Linearität für beliebiges $y \in E$ mit $\|y\|_E \leq 1$ sofort auch

$$\|A_{m_0,n}y\|_F = \left\| A_{m_0,n} \frac{x - x_0}{r} \right\|_F \leq \frac{1}{r} (\|A_{m_0,n}x\|_F + \|A_{m_0,n}x_0\|_F) \leq \frac{2k_0}{r}, \quad (8.6)$$

also die behauptete Ungleichung mit $\beta = \frac{2k_0}{r}$.

- Dies bedeutete jedoch insbesondere $\forall x \in E \forall n \in \mathbb{N}: \|A_{m_0,n}x\|_F \leq \beta\|x\|_E$, also auch

$$\forall n \in \mathbb{N}: \|A_{m_0,n}x_{m_0}\|_F \leq \beta\|x_{m_0}\|_E,$$

im Widerspruch zur vorausgesetzten Unbeschränktheit der Folgen $(\|A_{m,n}x_m\|_F)_{n \in \mathbb{N}}$.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 9

Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit – vgl. Abschnitt 6.2

- **Satz 6.9 [Osgood]:** Sei (E, d) ein vollständiger metrischer Raum, $(f_j)_{j \in J}$ eine Familie von stetigen Funktionen $f_j: E \rightarrow \mathbb{R}$, welche punktweise nach oben beschränkt sind, d.h.,

$$\forall x \in E \exists M_x \in \mathbb{R} \forall j \in J: f_j(x) \leq M_x .$$

Dann existiert eine (offene oder abgeschlossene) Kugel $K \subset E$ und ein $M \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall x \in K \forall j \in J: f_j(x) \leq M . \quad (9.1)$$

- **Satz 6.10 [Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit]:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banach-Raum und $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, $(A_j)_{j \in J}$ eine Familie aus $\mathcal{L}(E, F)$, welche punktweise beschränkt ist, d.h.,

$$\forall x \in E \exists M_x \in \mathbb{R} \forall j \in J: \|A_j(x)\|_F \leq M_x .$$

Dann ist $(\|A_j\|_{\mathcal{L}(E, F)})_{j \in J}$ beschränkt.

- **Satz 6.11:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum und $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{L}(E, F)$. Weiter konvergiere für jedes $x \in E$ die Folge $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ in F . Dann ist die durch $A(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ definierte Abbildung linear und stetig. Weiter gilt

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} . \quad (9.2)$$

Der Satz von Banach-Steinhaus – vgl. Abschnitt 6.3

- **Satz 6.13 [Banach-Steinhaus]:** Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ Banachräume über $\mathbb{K}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{L}(E, F)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist punktweise konvergent.

(2) (a) $(\|A_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(b) $\exists S \subset E$, so dass S dicht in E und die Folge $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $x \in S$ konvergiert.

- **Satz 6.14:** Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ und $(G, \|\cdot\|_G)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$, wobei $(F, \|\cdot\|_F)$ vollständig sei. Weiter sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge aus $\mathcal{L}(E, F)$ und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge aus $\mathcal{L}(F, G)$ sowie $A: E \rightarrow F$ und $B: F \rightarrow G$ die entsprechenden punktweisen Grenzwerte.

Dann konvergiert auch die Folge $(B_n \circ A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{L}(E, G)$ punktweise.

Schwache Konvergenz – vgl. Abschnitt 6.4

- **Definition 6.15:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus E und $x \in E$.

(a) Wir nennen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **stark konvergent** gegen x und schreiben $x_n \rightarrow x$, falls $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ in E (d.h., $\|x_n - x\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$).

(b) Wir nennen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **schwach konvergent** gegen x und schreiben $x_n \rightharpoonup x$, falls

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}): f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

• **Bemerkung 6.16:**

- (a) Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.
- (b) Ist jedem Hilbertraum $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ gilt

$$x_n \rightharpoonup x \iff \forall z \in E: \langle x_n, z \rangle_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle x, z \rangle_E \quad (9.3)$$

- (c) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormal in einem Hilbertraum $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$. Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen 0, kann jedoch keine Teilfolge besitzen, welche stark konvergiert.

- **Satz 6.17:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E eine schwach konvergente Teilfolge.

Zusatzaufgabe 9.1: Der Operator $A: (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ sei definiert durch

$$(Af)(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & \text{für } x \in]0, 1] \\ f(0), & \text{für } x = 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

- (a) Zeigen Sie, dass $A: (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ linear und stetig ist.
- (b) Existiert ein stetiger, linearer Operator $B: (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, so dass punktweise $A^n \rightarrow B$ gilt?

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.1:

- (a) Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für jedes $x \in]0, 1]$ jeweils ein $\xi_x \in [0, x]$, so dass

$$\int_0^x f(t) dt = (x - 0)f(\xi).$$

Also folgt – da f stetig und $|\xi_x| \leq x$ ist – nun wegen $(Af)(x) = f(\xi_x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ zunächst die Stetigkeit des Bildes Af , d.h., in der Tat gilt $A: C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$. Da außerdem

$$A(\lambda f + \mu g)(0) = (\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda(Af)(0) + \mu(Ag)(0)$$

sowie aufgrund der Linearität des Integrals auch

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1]: A(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t) dt \\ &= \lambda \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt + \mu \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = \lambda(Af)(x) + \mu(Ag)(x) \end{aligned}$$

gilt, ist $A: C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ eine lineare Abbildung. Wegen $|(Af)(0)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$ und, da mit Mittelwertsatz (vgl. oben)

$$\forall x \in]0, 1]: |(Af)(x)| = \left| \frac{1}{x} \cdot (x - 0)f(\xi_x) \right| = |f(\xi_x)| \leq \|f\|_\infty$$

folgt, ergibt sich nun insgesamt $\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, also ist A beschränkt mit $\|A\| \leq 1$ und als linearer Operator somit stetig.

- (b) Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 6.13) genügt es, die Beschränktheit der Folge $(\|A^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ zu überprüfen und die punktweise Konvergenz auf einer dichten Teilmenge von $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ zu zeigen:

- In (a) haben wir gezeigt, dass $\|A\| \leq 1$ gilt, also folgt $\forall n \in \mathbb{N}: \|A^n\| \leq \|A\|^n \leq 1^n = 1$. Somit ist die Folge $(\|A^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ durch 1 nach oben beschränkt.

- In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass $\mathbb{P}([0, 1], \mathbb{R})$ dicht in $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist. Somit genügt es nun, die punktweise Konvergenz für ein beliebiges Polynom zu zeigen. Da $\mathbb{P}([0, 1], \mathbb{R})$ von den Monomen aufgespannt wird, betrachten wir also die Folge der Monome $(f_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ mit $f_\ell(x) := x^\ell$. Für diese gilt

$$Af_\ell(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x t^\ell dt = \frac{x^\ell}{\ell+1}, & \text{für } x \in]0, 1] , \\ 0^\ell, & \text{für } x = 0 , \end{cases}$$

also $Af_\ell(x) = \frac{f_\ell(x)}{\ell+1}$, d.h., das Monom x^ℓ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{\ell+1}$. Somit folgt

$$A^n f_\ell(x) = \frac{f_\ell(x)}{(\ell+1)^n} \begin{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, & \text{falls } \ell > 0, \\ 1, & \text{falls } \ell = 0. \end{cases}$$

Also konvergiert $A^n f$ für jedes $f \in \mathbb{P}([0, 1], \mathbb{R})$ punktweise.

Die Existenz eines stetigen, linearen Operators $B: (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ folgt nun aus dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 6.13).

Bemerkung: Es ist $Bf(x) \equiv f(0)$.

Zusatzaufgabe 9.2: Beweisen Sie die Aussagen aus Bemerkung 6.16.

Lösung zu Zusatzaufgabe 9.2:

- (a) Ist $x_n \rightarrow x$ in E und $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ beliebig, also f stetig, so gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.
- (b) Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz (Satz 5.29) gilt

$$f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \quad \implies \quad \exists z \in E: \forall x \in E: f(x) = \langle x, z \rangle_E .$$

- (c) (i) Nach Satz 5.36 gilt

$$\forall z \in E: \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x_n, z \rangle|^2 \leq \|z\|^2 < \infty ,$$

so dass notwendigerweise $\langle x_n, z \rangle \rightarrow 0 = \langle 0, z \rangle$ gelten muss. Dies ist genau die schwache Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0.

- (ii) Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormal in $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$, gilt für beliebige $n > m$ stets

$$\|x_n - x_m\|^2 = \langle x_n, x_n \rangle_E + \langle x_m, x_m \rangle_E = \|x_n\|^2 + \|x_m\|^2 = 2 ,$$

also $\|x_n - x_m\|^2 = \sqrt{2} \not\rightarrow 0$, so dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Norm noch nicht einmal eine konvergente Teilfolge besitzen kann (da sie keine Cauchyteilfolge enthalten kann).

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 10

Kompaktheit und Präkompaktheit – vgl. Abschnitt 6.5

- **Definition 6.18:** Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $A \subset X$.

- (a) Eine Familie $(U_j)_{j \in I}$ von offenen Teilmengen von X heißt **offene Überdeckung** von A , falls gilt:

$$A \subset \bigcup_{j \in I} U_j . \quad (10.1)$$

- (b) A heißt **kompakt** (oder **überdeckungskompakt**) genau dann, falls zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h., ein $J \subset I$ endlich existiert, so dass bereits

$$A \subset \bigcup_{j \in J} U_j . \quad (10.2)$$

gilt.

- (c) A heißt **folgenkompakt** genau dann, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A eine in A konvergente Teilfolge besitzt, d.h.,

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \left((\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in A) \implies \exists \text{TF}(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \exists z \in A : x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z \right) \quad (10.3)$$

- (d) A heißt **präkompakt** genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von A mit offenen ε -Kugeln gibt.

- **Bemerkung 6.19:** Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $A \subset X$.

- (a) Es gilt: A überdeckungskompakt $\implies A$ folgenkompakt.
Der Beweis findet sich etwa in Otto Forster, Analysis 2.

- (b) Es gilt: A überdeckungskompakt $\implies A$ präkompakt.
Der Beweis ergibt sich direkt durch Anwendung der Definition der Präkompaktheit auf die offene Überdeckung aller ε -Kugeln, welche als Mittelpunkt ein Element aus A haben.

- (c) Mit $A \subset X$ vollständig meinen wir, dass $(A, d_{A \times A})$ vollständig sei, also dass jede Cauchyfolge in X , deren Folgenglieder sämtlich schon in A liegen, einen Grenzwert in (X, d_X) besitzt, welcher auch schon in A liegt.

- **Satz 6.20:** Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $A \subset X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) A ist überdeckungskompakt.
- (b) A ist folgenkompakt.
- (c) A ist vollständig und präkompakt.

- **Satz 6.21:** Sei (X, d_X) ein vollständiger metrischer Raum, $A \subset X$. Dann gilt

$$A \text{ präkompakt} \iff \bar{A} \text{ kompakt} .$$

- **Satz 6.22:** Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $A \subset X$. Dann gilt

$$\bar{A} \text{ kompakt} \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ aus } A \exists \text{ konvergente TF in } X.$$

Der Satz von Arzelà-Ascoli und Anwendungen – vgl. Abschnitt 6.6

- **Definition 6.23:** Sei (X, d) kompakt, $A \subset C(X, \mathbb{K}^m)$.

(a) A heißt **beschränkt** $:\iff \sup_{f \in A} \|f\|_\infty =: C < \infty$

(b) A heißt **gleichgradig gleichmäßig stetig**

$$:\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x, y \in X: \left(d(x, y) < \delta \implies \forall f \in A: \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \right).$$

- **Bemerkung 6.24:**

(a) Nach dem Satz von Heine-Borel ist eine Teilmenge eines endlich-dimensionalen normierten Raumes genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

(b) Nach dem Satz vom Minimum/Maximum ist

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (10.4)$$

für jedes $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ endlich.

(c) Analog erhalten wir für kompakte metrische Räume (X, d_X) , dass

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\| < \infty \quad (10.5)$$

für jedes $f \in C(X, \mathbb{K}^m) := \{f: X \rightarrow \mathbb{K}^m \mid f \text{ stetig} \}$.

(d) Insbesondere ist $(C(X, \mathbb{K}^m), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banach-Raum.

- **Satz 6.25 [Arzelà-Ascoli]:** Sei (X, d) kompakt, $A \subset C(X, \mathbb{K}^m)$. Dann gilt

$$A \text{ präkompakt} \iff A \text{ beschränkt und gleichgradig gleichmäßig stetig}$$

- **Satz 6.26 [Peano]:** Sei $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, d.h.,

$$\exists M < \infty: \sup_{(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n} \|f(t, x)\| \leq M. \quad (10.6)$$

Weiter sei $\eta \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann existiert eine differenzierbare Funktion $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\left. \begin{aligned} \forall t \in [a, b]: x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(a) &= \eta. \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

Zusatzaufgabe 10.1: Untersuchen Sie folgende Mengen auf Beschränktheit und Kompaktheit.

$$(a) E_1 = \left\{ x \in \ell^2 \mid \forall i \in \mathbb{N}: |x_i| \leq \frac{1}{\sqrt{i}} \right\},$$

$$(b) E_2 = \left\{ x \in \ell^2 \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leq 1 \right\},$$

$$(c) E_3 = \left\{ x \in \ell^2 \mid \forall i \in \mathbb{N}: |x_i| \leq \frac{1}{i} \right\}.$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.1:

(a) E_1 ist nicht beschränkt, also auch nicht kompakt, denn für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} e_i \in E_1, \quad \|x^{(n)}\| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

- (b) $E_2 = \overline{B_1(0)}$ ist beschränkt, aber nicht kompakt, denn $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in E_2 , welche wegen $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$, $n \neq m$, keine konvergente Teilfolge besitzt.
- (c) E_3 ist kompakt, denn ist $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in E_3 , so sind $(x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils durch $\frac{1}{i}$ beschränkte Folgen für alle i . Nach dem **Diagonalverfahren**, d.h.,
- Es ist $(x_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine durch 1 beschränkte reelle Zahlenfolge, so dass nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(n_1)})_{n_1 \in \mathbb{N}}$ von $(x_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ existiert. Zu dieser gehört dann auch die Teilfolge $(x^{(n_1)})_{n_1 \in \mathbb{N}}$ von $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in E_3 .
 - Es ist $(x_2^{(n_1)})_{n_1 \in \mathbb{N}}$ eine durch $\frac{1}{2}$ beschränkte reelle Zahlenfolge, so dass nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_2^{(n_2)})_{n_2 \in \mathbb{N}}$ von $(x_2^{(n_1)})_{n_1 \in \mathbb{N}}$ (und nach Konstruktion damit auch von $(x_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$) existiert. Zu dieser gehört dann auch die Teilfolge $(x^{(n_2)})_{n_2 \in \mathbb{N}}$ von $(x^{(n_1)})_{n_1 \in \mathbb{N}}$ (also auch von $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$) in E_3 .
 - Es ist $(x_3^{(n_2)})_{n_2 \in \mathbb{N}}$ eine durch $\frac{1}{3}$ beschränkte reelle Zahlenfolge, so dass nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_3^{(n_3)})_{n_3 \in \mathbb{N}}$ von $(x_3^{(n_2)})_{n_2 \in \mathbb{N}}$ (und nach Konstruktion damit auch von $(x_3^{(n_1)})_{n_1 \in \mathbb{N}}$ und analog von $(x_3^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$) existiert. Zu dieser gehört dann auch die Teilfolge $(x^{(n_3)})_{n_3 \in \mathbb{N}}$ von $(x^{(n_2)})_{n_2 \in \mathbb{N}}$ (also auch von $(x^{(n_1)})_{n_1 \in \mathbb{N}}$ und somit auch von $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$) in E_3 .
 - (und so fort)
 - Schreiben wir nun alle diese Teilfolgen zeilenweise untereinander, so erhalten wir die Diagonalfolge, in dem wir aus der ersten Zeile das erste Element auswählen, aus der zweiten das zweite Element, aus der dritten das dritte Element, ... (und so fort).

gibt es eine Teilfolge, so dass $x_i^{(\ell)} \rightarrow x_i$ ($\ell \rightarrow \infty$), für alle i mit eindeutig bestimmten komponentenweisen Grenzwerten x_i . **Bemerkungen:**

- Beachte, dass obige Teilfolgen $(x^{(n_k)})_{n_k \in \mathbb{N}}$ ineinander geschachtelt sind bzw. eine „Kette“ von Teilfolgen bildet, so dass sich auch Eigenschaften vererben. D.h., insbesondere dass die Teilfolge $(x^{(n_k)})_{n_k \in \mathbb{N}}$ für alle Komponenten $1, \dots, k$ bereits konvergiert.
- Beachte weiter, dass die oben im letzten Punkt konstruierte Teilfolge $x^{(\ell)}$ jeweils ab dem ℓ -ten Glied eine Teilfolge von allen Teilfolgen $(x^{(n_k)})_{n_k \in \mathbb{N}}$ mit $k \leq \ell$ ist, also insbesondere die Eigenschaft besitzen muss, in der k -ten Komponente (für alle $k \leq \ell$) zu konvergieren.
- Somit konvergiert $x_i^{(\ell)} \rightarrow x_i$ in der Tat für jedes beliebige i , denn für jedes feste i gibt es mindestens ein ℓ mit $i \leq \ell$, so dass der vorangegangene Punkt greift.

Wegen $x^{(\ell)} \in E_3$ folgt jeweils $|x_i^{(\ell)}| \leq \frac{1}{i}$, so dass mit der komponentenweisen Konvergenz dann auch $|x_i| \leq \frac{1}{i}$ für alle i , also $x := (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in E_3 folgt sowie für jedes $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ und eines $\ell_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned}
 (\ell \geq \ell_\varepsilon) \quad \implies \quad \|x - x^{(\ell)}\|^2 &\leq \sum_{i=1}^{j_\varepsilon} \underbrace{|x_i - x_i^{(\ell)}|^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{2j_\varepsilon}} + \sum_{i=j_\varepsilon+1}^{\infty} \underbrace{|x_i - x_i^{(\ell)}|^2}_{\leq (|x_i| + |x_i^{(\ell)}|)^2} \\
 &\leq j_\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^2}{2j_\varepsilon} + \sum_{i=j_\varepsilon+1}^{\infty} \underbrace{(|x_i| + |x_i^{(\ell)}|)^2}_{\leq (\frac{1}{i} + \frac{1}{i})^2} \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \underbrace{\sum_{i=j_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{4}{i^2}}_{< \frac{\varepsilon^2}{2}} < \varepsilon^2.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir aus einer beliebigen Folge aus E_3 eine konvergente Teilfolge gewinnen können und somit gezeigt, dass E folgenkompakt und – da E_3 mit der ℓ^2 -Norm ein normierter und damit insbesondere auch ein metrischer Raum ist – somit auch kompakt ist.

Zusatzaufgabe 10.2:

Sei (X, d) ein metrischer Raum. $M \subset X$ heißt **relativ kompakt**, wenn jede Folge aus M eine in X konvergente Teilfolge besitzt. Sei $c_0 := \{x \in \ell^\infty \mid x(n) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty\}$. Zeigen Sie:

$$M \subset c_0 \text{ ist relativ kompakt} \iff M \text{ ist beschränkt und } \sup_{x \in M} \left(\sup_{k \geq N} |x(k)| \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 10.2:

„ $\implies$ “: Sei M relativ kompakt.

- Wäre M unbeschränkt, so gäbe es eine Folge x_n aus M mit $\|x_n\|_\infty \rightarrow \infty$. Aufgrund der vorausgesetzten relativen Kompaktheit besäße sie jedoch andererseits eine konvergente Teilfolge $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$, welche aufgrund ihrer Konvergenz folglich auch beschränkt sein müsste. Also wäre $(\|\tilde{x}_n\|_\infty)_n$ ebenfalls beschränkt, im Widerspruch zu $\|x_n\|_\infty \rightarrow \infty$ (Wir haben dabei benutzt, dass eine nichtnegative bestimmt divergente Folge nur einen Häufungspunkt (nämlich ∞) besitzt).
- Angenommen, es gelte $\sup_{x \in M} \left(\sup_{k \geq N} |x(k)| \right) \not\rightarrow 0$. Dann existieren $\varepsilon > 0$ und eine Folge x_n aus M , so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}: b_n := \sup_{k \geq n} |x_n(k)| \geq \varepsilon \quad (10.8)$$

und somit keine Teilfolge von x_n existieren kann, die in c_0 gegen ein $x_0 \in c_0$ konvergiert, im Widerspruch zur vorausgesetzten relativen Kompaktheit von M .

„ $\impliedby$ “: Nun sei M beschränkt und es gelte $\sup_{x \in M} \left(\sup_{k \geq N} |x(k)| \right) \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus M . Aufgrund der Beschränktheit kann man analog zur Aufgabe 9.1 (c) mittels Diagonalverfahren eine Teilfolge (die wir hier der Einfachheit halber ebenfalls mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finden, welche $x_n(k) \rightarrow x_0(k)$ im Fall $n \rightarrow \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Mit der vorausgesetzten Eigenschaft, dass $\sup_{x \in M} \left(\sup_{k \geq N} |x(k)| \right) \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$ gelte, folgt nun zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass zunächst

$$\sup_{x \in M} \left(\sup_{k \geq N_\varepsilon} |x(k)| \right) \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (10.9)$$

und insbesondere auch $\forall n \in \mathbb{N} \forall k \geq N_\varepsilon |x_n(k)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ gilt. Zusammen mit der zuvor gezeigten komponenten (also punktwisen) Konvergenz, d.h., mit $\forall k \in \mathbb{N}: x_0(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k)$ schließen wir nun auch darauf, dass für die zu jedem $k \geq N_\varepsilon$ gehörigen Grenzwerte genauso

$$\forall k \geq N_\varepsilon: |x_0(k)| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

also insbesondere auch $\sup_{k \geq N_\varepsilon} |x_0(k)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Insgesamt ergibt sich nun

$$\begin{aligned} n \geq N_\varepsilon \implies \|x_n - x_0\|_\infty &= \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_n(k) - x_0(k)| \\ &\leq \underbrace{\sup_{k=1, \dots, N_\varepsilon-1} |x_n(k) - x_0(k)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4}} + \sup_{k \geq N_\varepsilon} |x_n(k)| + \underbrace{\sup_{k \geq N_\varepsilon} |x_0(k)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4}} \\ &\leq \sup_{x \in M} \left(\sup_{k \geq N_\varepsilon} |x(k)| \right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge besitzt, welche wiederum einen Grenzwert in ℓ^∞ hat. Da c_0 abgeschlossen in ℓ^∞ ist, folgt $x_0 \in c_0$. Also ist M relativ kompakt.

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 11

Fortsetzungssätze von Hahn-Banach

- **Satz 7.1:** Sei E ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$. Setzen wir

$$f_1 := \operatorname{Re} f: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2 := \operatorname{Im} f: E \rightarrow \mathbb{R},$$

dann ist f genau dann $\mathbb{C}$ -linear, wenn f_1 eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung ist und es gilt, dass

$$\forall x \in E: f_2(x) = -f_1(ix) . \quad (11.1)$$

- **Definition 7.2:** Sei E ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(a) p heißt **subadditiv**, falls

$$\forall x, y \in E: p(x + y) \leq p(x) + p(y) . \quad (11.2)$$

(b) p heißt **positiv homogen**, falls

$$\forall x \in E \forall 0 < \lambda \in \mathbb{R}: p(\lambda x) = \lambda p(x) . \quad (11.3)$$

(c) p heißt **homogen**, falls

$$\forall x \in E \forall \alpha \in \mathbb{K}: p(\alpha x) = |\alpha| p(x) . \quad (11.4)$$

(d) p heißt **Halbnorm**, falls $p \geq 0$ sowie p subadditiv und homogen ist.

- **Satz 7.3 [Hahn-Banach – reeller Fall]:** Sei E ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ subadditiv, positiv homogen, $F \subset E$ ein $\mathbb{R}$ -linearer Unterraum, $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ linear und $f \leq p$ auf F . Dann existiert ein $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ linear, so dass

$$g|_F = f \quad \text{und} \quad \forall x \in E: g(x) \leq p(x) . \quad (11.5)$$

- **Korollar 7.4 [Hahn-Banach – komplexer Fall]:** Sei E ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum, $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ subadditiv, positiv homogen, $F \subset E$ ein $\mathbb{C}$ -linearer Unterraum, $f: F \rightarrow \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung und $\operatorname{Re} f \leq p$ auf F . Dann existiert eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $g: E \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$g|_F = f \quad \text{und} \quad \forall x \in E: \operatorname{Re} g(x) \leq p(x) . \quad (11.6)$$

- **Satz 7.5 [Hahn-Banach mit Halbnormen]:** Sei E ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm, $F \subset E$ ein $\mathbb{K}$ -linearer Unterraum, $f: F \rightarrow \mathbb{K}$ eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung und $|f| \leq p$ auf F . Dann existiert eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung $g: E \rightarrow \mathbb{K}$, so dass

$$g|_F = f \quad \text{und} \quad \forall x \in E: |g(x)| \leq p(x) . \quad (11.7)$$

- **Korollar 7.6 [Hahn-Banach auf normierten Räumen]:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter $\mathbb{K}$ -Vektorraum, $F \subset E$ ein $\mathbb{K}$ -linearer Unterraum, $f: F \rightarrow \mathbb{K}$ eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung, welche stetig bezüglich der $\|\cdot\|_E$ -Norm ist. Dann existiert eine stetige $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung $g: E \rightarrow \mathbb{K}$, so dass

$$g|_F = f \quad \text{und} \quad \|g\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})} = \|f\|_{\mathcal{L}(F, \mathbb{K})} . \quad (11.8)$$

- **Satz 7.7:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter $\mathbb{K}$ -Vektorraum, $0 \neq x_0 \in E$ beliebig und $\beta \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann existiert eine stetige $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung $g: E \rightarrow \mathbb{K}$, so dass

$$g(x_0) = \beta \|x_0\| \quad \text{und} \quad \|g\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})} = |\beta| . \quad (11.9)$$

Zusatzaufgabe 11.1: (Satz v. Hahn-Banach & Prinzip der glm. Beschränktheit)

- (a) Begründen Sie, warum die Abbildung $\Gamma: E \rightarrow E'', x \rightarrow \mathcal{F}_x$ mit $\forall f \in E': \mathcal{F}_x(f) = f(x)$ aus Definition 5.30 linear und stetig ist.
- (b) Zeigen Sie nun mit einem der Fortsetzungssätze von Hahn-Banach die Injektivität der Abbildung $\Gamma: E \rightarrow E'', x \rightarrow \mathcal{F}_x$ mit $\forall f \in E': \mathcal{F}_x(f) = f(x)$ aus Definition 5.30.
- (c) Zeigen Sie nun mit Hilfe von (a) und (b), dass Γ sogar eine Isometrie ist, d.h., es gilt

$$\forall x \in E: \|x\|_E = \|\mathcal{F}_x\|_{E''} . \quad (11.10)$$

- (d) Sei E ein Banachraum und $(x_j)_{j \geq 1} \in E$ eine Folge. Zeigen Sie:
Gilt $x_j \rightarrow x \in E$ schwach, so ist die Folge $(\|x_j\|)_{j \geq 1}$ beschränkt. **Tipp:** (c) und Satz 6.10.
- (e) Sei E ein Banachraum und $x, x_j \in E, x', x'_j \in E'$ gegeben, so dass $x_j \rightarrow x$ schwach in E und $x'_j \rightarrow x'$ stark in E' (bei $j \rightarrow \infty$). Dann gilt

$$x'_j(x_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x'(x) .$$

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.1:

- (a) Die Abbildung ist linear, denn aufgrund der Linearität aller $f \in E'$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall f \in E': (\Gamma(\lambda x + \mu y))(f) &= \mathcal{F}_{\lambda x + \mu y}(f) = f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \\ &= \lambda \mathcal{F}_x(f) + \mu \mathcal{F}_y(f) = (\lambda \Gamma(x) + \mu \Gamma(y))(f) . \end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit eines jeden $f \in E'$ ergibt sich

$$\forall x \in E \ \forall f \in E': |\mathcal{F}_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{E'} \cdot \|x\|_E = \|x\|_E \cdot \|f\|_{E'} ,$$

also die Stetigkeit aufgrund der Beschränktheit. Für die Operatornorm von $\mathcal{F}_x \in E'' = \mathcal{L}(E', \mathbb{K})$ gilt somit insbesondere

$$\|\mathcal{F}_x\|_{E''} \leq \|x\|_E . \quad (11.11)$$

- (b) Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{F}_{x_0} \equiv 0$ nur im Fall $x_0 = 0$ gilt, also dass für beliebiges $x_0 \in E \setminus \{0\}$ mindestens ein $f \in E'$ existiert, so dass $\mathcal{F}_{x_0}(f) := f(x_0) \neq 0$ ist. Dazu sei $x_0 \neq 0$ beliebig, fest. Nach Satz 7.7 existiert dann (mit $\beta = 1$) eine stetige und $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f(x_0) = \|x_0\|_E \neq 0$ und $\|f\|_{E'} = 1$. Für dieses gilt dann genau $\mathcal{F}_{x_0}(f) := f(x_0) = \|x_0\|_E \neq 0$. Also ist $\Gamma: E \rightarrow E'', x \rightarrow \mathcal{F}_x$ wirklich injektiv.

Bemerkung: Weiterhin folgt mit dem eben konstruierten f wegen $\|f\|_{E'} = 1$ sofort auch

$$\forall x_0 \in E \setminus \{0_E\}: \|x_0\|_E = |\mathcal{F}_{x_0}(f)| \leq \|\mathcal{F}_{x_0}\|_{E''} \cdot \underbrace{\|f\|_{E'}}_{=1} = \|\mathcal{F}_{x_0}\|_{E''} \quad (11.12)$$

- (c) Da die Behauptung für $x = 0_E$ trivial ist, ergibt sich die Isometrie (11.10) sofort aus den beiden in (a) und (b) hergeleiteten Ungleichungen (11.11) und (11.12).
- (d) Sei $(x_j) \subset E$ schwach konvergent gegen $x \in E$. Aufgrund der nach (a) stetigen und nach (c) isometrischen Einbettung $E \hookrightarrow E''$ in den **Bidual** $E'' = \mathcal{L}(E', \mathbb{K})$, erhalten wir zu jedem $x_j \in E$ ein eindeutiges $\mathcal{F}_{x_j} \in E''$, also eine stetige Linearform $\mathcal{F}_{x_j}$ auf E' . Da nach Voraussetzung $x_j \rightarrow x \in E$ schwach gilt, folgt nun auch die punktweise Konvergenz $\mathcal{F}_{x_j} \rightarrow \mathcal{F}_x$, denn es ist

$$\forall y \in E': \mathcal{F}_{x_j}(y) = y(x_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y(x) = \mathcal{F}_x(y)$$

(insbesondere ist die Folge $(\mathcal{F}_{x_j})_{j \in \mathbb{N}}$ punktweise beschränkt). Mit dem nach Satz 6.10 gültigen Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (oder alternativ auch nach Satz 6.13 [Banach-Steinhaus] mit (1) $\implies$ (2)(a)) folgt nun auch die gleichmäßige Beschränktheit, d.h., es gilt

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\mathcal{F}_{x_j}\|_{E''} < \infty . \quad (11.13)$$

Mit (11.10) folgt somit auch die behauptete Beschränktheit der Folge $(\|x_j\|_E)$.

- (e) Mit der nach (d) vorhandenen gleichmäßigen Beschränktheit der Folge $(\|x_j\|_E)$ sowie der Linearität und Stetigkeit der x_j erhalten wir wegen $x_j \rightharpoonup x$ und $\|x'_j - x'\|_{E'} \rightarrow 0$ somit die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x'_j(x_j) - x'(x)| &\leq |(x'_j - x')(x_j)| + |x'(x_j - x)| \\ &\leq \underbrace{\|x'_j - x'\|_{E'}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\|x_j\|_E}_{\leq M} + \underbrace{|x'(x_j - x)|}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 11.2: Sei E ein Hilbertraum und $F \subset E$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum.

- (a) Sei $f \in F'$. Zeigen Sie, dass $E' \ni g := f \circ p$ die eindeutige Fortsetzung von f mit $\|f\| = \|g\|$ ist. Hierbei bezeichnet $p: E \rightarrow F$ die orthogonale Projektion.
- (b) Sei $0 \neq a \in E$ und $F := \{x \in E \mid \langle x, a \rangle = 0\}$. $f \in F'$ sei gegeben durch $f(x) := \langle x, b \rangle$, $b \in E$. Zeigen Sie, dass

$$\bar{f}(x) := \langle x, b \rangle - \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\|^2} \langle x, a \rangle, \quad x \in E$$

die eindeutige normgleiche Fortsetzung von f auf E ist.

Lösung zu Zusatzaufgabe 11.2:

- (a) • Sei $x \in E$ beliebig. Da F als abgeschlossener Unterraum eines als Hilbertraum vollständigen Raumes selbst vollständig ist, existiert somit nach Satz 5.22 eine eindeutige Darstellung $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in F$ und $x_2 \in F^\perp$, so dass mit $p: E \rightarrow F$ dann $p(x) = x_1$ gilt.
- Aufgrund von $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2$ (vgl. Satz 5.12 – Pythagoras) sowie wegen

$$\|g(x)\| = \|(f \circ p)(x_1 + x_2)\| = \|f(x_1)\| \leq \|f\| \cdot \|x_1\|$$

folgt $\|g\| \leq \|f\|$ und mit $g|_F = f$ sogar $\|f\| = \|g\|$.

- Andererseits lässt sich jede Fortsetzung h in der Form

$$h(x) = \langle x, a \rangle + \langle x, b \rangle$$

darstellen, wobei $a \in F$ und $b \in F^\perp$ (Rieszscher Darstellungssatz – Satz 5.29).

- Für $x \in F$ gilt $h(x) = \langle x, a \rangle = f(x)$ und somit $\|f\| = \|a\|$ (vgl. auch ZA 11.1 (c) und verwende die in Satz 5.33 gezeigte Reflexivität von Hilberträumen).
- Somit haben wir $\|a\|^2 = \|h\|^2 = \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ genau dann, wenn $\|b\| = 0$, also $b = 0$ gilt.

- (b) Da durch

$$p(x) := x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$$

die orthogonale Projektion auf F gegeben ist und sich f als

$$f(x) := \langle x, b \rangle$$

darstellen lässt, erhalten wir somit wie behauptet

$$f(p(x)) = \left\langle x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a, b \right\rangle = \langle x, b \rangle - \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\|^2} \langle x, a \rangle.$$

Zusatzmaterial zum Übungsblatt 12

Offene Abbildungen, Satz von Banach-Schauder, abgeschlossene Graphen

- **Definition 8.1:** Seien (E, d_E) und (F, d_F) metrische Räume. Eine Abbildung $f: E \rightarrow F$ heißt **offen**, wenn für alle offenen Teilmengen $A \subset E$ das Bild $f(A)$ offen in $(f(E), d_F)$ ist.
- **Lemma 8.2:** Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, $M, N \subset E$ sowie $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gelten:
 - (a) $\overline{M} + \overline{N} \subset \overline{M + N}$, wobei $M + N := \{x \in E \mid \exists m \in M \exists n \in N: x = m + n\}$ ist,
 - (b) $\alpha \overline{M} = \overline{\alpha M}$, (c) $\overline{M} - \overline{N} \subset \overline{M - N}$, (d) Ist M offen, $x \in E$, $\alpha \neq 0$, dann ist $x + \alpha M$ offen.
- **Satz 8.3 [Banach-Schauder]:**
Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ Banachräume über $\mathbb{K}$ sowie $A \in \mathcal{L}(E, F)$ surjektiv, so ist A offen.²⁰
- **Satz 8.4 [Satz von der stetigen Inversen]:** Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ Banachräume über $\mathbb{K}$ sowie $A \in \mathcal{L}(E, F)$ bijektiv. Dann ist A ein Homöomorphismus, d.h., $A^{-1}: F \rightarrow E$ ist stetig.
- **Bemerkung 8.5:**

- (a) Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$, dann ist durch

$$\forall (x, y) \in E \times F: \|(x, y)\|_{E \times F} := \|x\|_E + \|y\|_F \quad (12.1)$$

eine Norm $\|\cdot\|_{E \times F}: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

- (b) Eine zu (12.1) äquivalente Norm ist etwa

$$\|(x, y)\|' := \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2}. \quad (12.2)$$

- (c) Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ Banachräume, so wird $(E \times F, \|\cdot\|_{E \times F})$ ebenfalls zu einem Banach-Raum.

- **Definition 8.6:** Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$ sowie $A: E \rightarrow F$ eine Abbildung. Dann nennen wir die Menge

$$\text{Graph } A := \{(x, Ax) \mid x \in E\} \subset E \times F \quad (12.3)$$

den **Graphen der Abbildung** A .

- **Bemerkung 8.7:**

- (a) Ist $A: E \rightarrow F$ stetig, dann ist $G_A := \text{Graph } A$ abgeschlossen in $(E \times F, \|\cdot\|_{E \times F})$, d.h.,

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}: (x_n, y_n) \in G_A \wedge (x_n, y_n) \xrightarrow{E \times F} (x, y) \right) \implies (x, y) \in G_A,$$

denn aufgrund der Stetigkeit folgt $(x_n, Ax_n) \rightarrow (x, Ax) \in G_A$.

- (b) Für $I = [a, b]$ seien $E = C^1(I)$ und $F = C^0(I)$ mit der Maximumnorm versehen. Dann:
 - ist $(F, \|\cdot\|_F)$ ein Banachraum, jedoch $(E, \|\cdot\|_E)$ **nicht**.
 - ist die durch $Ax := x'$ definierte $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung $A: (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (F, \|\cdot\|_\infty)$ unstetig, besitzt jedoch einen abgeschlossenen Graphen $\text{Graph } A$ entsprechend (12.3).

²⁰d.h., es gilt $\forall G \subset E$ offen : $A(G)$ offen in $(F, \|\cdot\|_F)$.

- ist die durch $Ax := x'$ definierte $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung $A: (E, \|\cdot\|_G) \rightarrow (F, \|\cdot\|_\infty)$ stetig bezüglich der **Graphennorm**

$$\|x\|_G := \|x\|_\infty + \|Ax\|_\infty . \quad (\text{denn es gilt } \forall x \in E: \|Ax\|_\infty \leq \|x\|_G) \quad (12.4)$$

- **Satz 8.8 [Satz vom abgeschlossenen Graphen]:**

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ Banachräume über $\mathbb{K}$ sowie $A: E \rightarrow F$ eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung. Weiter sei der Graph (12.3) abgeschlossen in $(E \times F, \|\cdot\|_{E \times F})$. Dann ist A stetig.

- **Satz 8.9:** Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum sowie E_1, E_2 abgeschlossene lineare Unterräume von E , derart, dass $E = E_1 \oplus E_2$, d.h.,

$$\forall x \in E \exists! x_1 \in E_1 \exists! x_2 \in E_2 \text{ mit } x = x_1 + x_2 .$$

Dann sind die Projektionen $P_1: E \rightarrow E_1, x \mapsto x_1$ und $P_2: E \rightarrow E_2, x \mapsto x_2$ stetig.

- **Definition 8.10:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{K}$. Dann heißt

(a) eine Abbildung $A: E \rightarrow E$ **symmetrisch** bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, falls gilt:

$$\forall x, y \in E: \langle Ax, y \rangle_E = \langle x, Ay \rangle_E . \quad (12.5)$$

(b) im Fall $D_A \subset E$ eine Abbildung $A: D_A \rightarrow E$ **symmetrisch**, falls gilt:

$$\forall x, y \in D_A: \langle Ax, y \rangle_E = \langle x, Ay \rangle_E . \quad (12.6)$$

- **Satz 8.11:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{K}$. Weiter sei $A: E \rightarrow E$ linear und symmetrisch. Dann ist Graph A abgeschlossen.
- **Korollar 8.12 [Satz von Hellinger-Töplitz]:** Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$. Weiter sei $A: E \rightarrow E$ linear und symmetrisch. Dann ist A stetig.

Sachwortverzeichnis

- σ -Algebra, 10
- Abbildung
 - Graph einer, 49
 - offene, 49
 - symmetrische, 50
- Axiom
 - Hausdorffsches Trennungs-, 1
- Basis
 - Orthonormal-, 32
 - Schauder-, 37
- Definitheit, 1, 2
- Einheitskugel, 2
- Folge
 - Cauchy-, 9
 - konvergente, 9
- Funktional
 - lineares, 31
- Gleichung
 - Parsevalsche, 32
- Graphennorm, 50
- Gruppe, 1
 - abelsche, 1
- Homöomorphismus, 15
- homogen, 46
 - positiv, 46
- Homogenität, 2
- Koeffizient
 - Fourier-, 32
- Komplement
 - orthogonales, 29
- konvergent
 - im quadratischen Mittel, 4
 - schwach, 39
 - stark, 39
- Linearform, 31
- Maß, 10
- Maßraum, 10
- Menge
 - offene, 2
- Metrik
 - äquivalente, 9
 - diskrete, 6
 - norminduzierte, 4
- Norm, 2
 - p -, 3
 - Halb-, 2, 46
 - Maximum-, 3
- Operator-, 14
- Operator
 - symmetrisch, 29
- Operatornorm, 14
- orthogonal, 24
- Projektion
 - orthogonale, 29
- Projektor, 29
- Raum
 - Banach-, 9
 - der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen, 10
 - der beschränkten Funktionen, 9
 - der Funktionen mit beschränkter Variation, 10
 - Hausdorff-, 1
 - Hilbert-, 9, 24
 - Innenprodukt-, 24
 - linearer, 1
 - metrischer, 2
 - vollständiger, 9
 - normierter, 2
 - Prä-Hilbert-, 24
 - topologischer, 1
 - Vektor-, 1
 - Euklidischer, 2
- Satz
 - vom abgeschlossenen Graphen, 50
 - von Heine-Borel, 43
 - von Hellinger Töplitz, 50
- Skalarprodukt
 - reellwertiges, 2
- subadditiv, 46
- Symmetrie, 1
- symmetrisch, 50
- Topologie, 1
 - diskrete, 6
 - indiskrete, 6
 - von einer Metrik induzierte, 4
- Transformation
 - Hauptachsen-, 18
- Umgebung
 - offene, 1
- Ungleichung
 - Besselsche, 28, 30
 - Cauchy-Schwarz-, 3
 - Dreiecks-, 1, 2
 - Hölder-, 3, 10
 - Minkowski-, 3, 10
- vollständig, 9