Aussagen und Quantoren:

(a) Mit Hilfe von Symbolen für **Variablen**, **Konstanten**, **Funktionen** und **Relationen** kann man **Terme** und **Aussagen** bilden:

- Jede Variable und jede Konstante ist ein Term. Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme und ist f eine n-stellige Funktion, so ist auch $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term.
- Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme und ist R eine n-stellige Relation, dann ist $R(t_1, \dots, t_n)$ eine Aussage, in der alle vorkommenden Variablen frei sind.

(b) Aus vorhandenen Aussagen kann man mittels logischer Symbole neue Aussagen bilden: Sind A und B Aussagen, dann sind auch

- $A \vee B$ („A oder B") **Vorsicht:** Damit ist kein exklusives „Oder" gemeint.
- $A \wedge B$ („A und B")
- $\neg A$ („nicht A") sowie $A \Longrightarrow B$ („A impliziert B", d.h., „aus A folgt B")

Aussagen. Abkürzend führt man noch $A \Longleftrightarrow B$ („A ist äquivalent zu B", d.h., „A gilt genau dann, wenn B gilt") an Stelle von $(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$ ein.

(c) Logische Axiome werden durch die folgenden Wahrheitstafeln festgelegt:

A	B	$A \Longrightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
w	w	w	w	w	f
w	f	f	f	w	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	f	f	w

(d) Ist x eine freie Variable in der Aussage A, so erlaubt man sich auch, mittels der Quantoren $\forall$ und $\exists$ die Aussagen $\forall x : A(x)$ („für jedes x gilt $A(x)$") und $\exists x : A(x)$ („es gibt ein x, für das $A(x)$ gilt") zu bilden, und in diesen ist dann x keine freie Variable mehr, sondern gebunden.

Mengen und Abbildungen

(a) In der Mengenlehre gibt man sich das zweistellige Relationssymbol $\in$ vor, mit dessen Hilfe man Aussagen wie $x \in y$ („x ist Element von y") formen kann.

(b) Ist $A(x)$ eine Aussage mit freier Variable x, so bezeichnet $\{x \mid A(x)\}$ die **Ansammlung (Klasse)** aller x, für welche die Aussage $A(x)$ wahr ist. Als grundlegendes nicht-logisches Axiom gibt man sich $(y \in \{x \mid A(x)\}) \Longleftrightarrow A(y)$ vor. **Mengen** sind spezielle Ansammlungen. Beispielsweise

- ist die **leere Menge** $\{\} := \emptyset := \{x | x \neq x\}$ eine Menge,
- ist mit zwei Mengen x, y die **Paarmenge** $\{x, y\} := \{z \mid (z = x) \vee (z = y)\}$ eine Menge,
- ist mit einer Menge x bei $z \subset x$, d.h. $\forall u\colon\ (u \in z \Longrightarrow u \in x)$, auch z eine Menge (**Teilmenge von** x genannt),
- sind mit zwei Mengen x, y auch $x \cup y := \{u \mid u \in x \vee u \in y\}$ (welche **Vereinigung** genannt wird) und $x \cap y := \{u \mid u \in x \wedge u \in y\}$ (welche **Durchschnitt** genannt wird) Mengen,
- ist mit einer Menge x auch $\mathcal{P}(x) := \{z \mid z \subset x\}$ eine Menge (**Potenzmenge** genannt).

(c) In analoger Weise wie Paarmengen kann man **geordnete Paare** und damit auch das **Produkt** $M \times N := \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$ zweier Mengen M, N definieren.

(d) Eine **Abbildung** $f\colon M \to N$ ist eine Teilmenge $R \subset M \times N$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Aufgabe 1.1: Die vorkommenden Symbole seien wie in der Schule zu interpretieren:

(a) Welche der folgenden Ausdrücke sind Terme, welche Aussagen ?

$$x - y\ , \qquad x = y + z\ , \qquad x \geq 3x\ , \qquad 5 \Longrightarrow (x = 2)\ ,$$
$$4 \leq 1\ , \qquad (3x = 2) \wedge (x \geq 5)\ , \qquad (x = y) \Longrightarrow (x = 2y)\ .$$

(b) Welche der folgenden Ausdrücke sind Aussagen, welche der auftretenden Variablen sind frei ?

(i) $(x \leq 4) \wedge (x > 3 \Longrightarrow x = 4)$

(iii) $\forall x\colon \exists y\colon (x \leq y)$

(ii) $\forall y\colon ((x = y) \Longrightarrow (x \leq y))$

(iv) $\forall x\colon \exists y\colon \exists x\colon x = y$

Aufgabe 1.2:

(a) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien, d.h., für beliebige Aussagen A, B wahr?

(i) $A \Longrightarrow A$ (ii) $(A \vee B) \Longrightarrow B$ (iii) $(A \wedge B) \Longrightarrow A$ (iv) $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$

(b) Beweisen Sie, dass aus $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow C$ die Aussage $A \Longrightarrow C$ folgt.

Anmerkung: Die auf dieser Tautologie basierende Beweistechnik nennt man **direkten Beweis**.

(c) Beweisen Sie, dass aus B und $\neg A \Longrightarrow \neg B$ die Aussage A folgt.

Anmerkung: Die auf dieser Tautologie basierende Beweistechnik nennt man einen **indirekten Beweis** oder auch einen **Widerspruchsbeweis**.

Aufgabe 1.3:

(a) Ein Barbier sei definiert als jemand, der genau diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Wer rasiert den Barbier? Beantworten Sie diese Frage im Hinblick auf das Russelsche Paradoxon.

(b) Weisen Sie nach, dass das in der Mengenlehre durch $x = y :\Longleftrightarrow \forall a : (a \in x \Longleftrightarrow a \in y)$ definierte Relationssymbol $=$ die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation besitzt, d.h.,

(i) für alle Mengen x gilt: $x = x$ (Reflexivität),
(ii) für alle Mengen x gilt: $x = y \Longrightarrow y = x$ (Symmetrie) und
(iii) für alle Mengen x, y, z gilt: $((x = y) \wedge (y = z)) \Longrightarrow x = z$ (Transitivität).

(c) Zeigen Sie, dass $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ eine Menge ist, die man wirklich als geordnetes Tupel (a, b) interpretieren kann, also dass $(a, b) = (c, d)$ genau dann gilt, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt. Damit wird das **kartesische Produkt** $A \times B$ von zwei Mengen A und B definiert durch

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}\ .$$

Aufgabe 1.4:

(a) Eine zweistellige Relation auf einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subset A \times A$.
Diese nennt man transitiv, wenn mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ auch $(x, z) \in R$ gilt.
Geben Sie alle transitiven Relationen auf der Menge $A := \{1, 2\}$ an.

(b) Welche der folgenden Relationen R sind Abbildungen ? Wie lautet gegebenenfalls die zugehörige Zuweisungsvorschrift (vorkommende Symbole sind wie in der Schule zu interpretieren)?

$$\big\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, m - n = 0\big\}\ , \qquad \big\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, (n = 0 \wedge 3|m) \vee (n = 1 \wedge 3 \nmid m)\big\}\ ,$$
$$\big\{(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,\big|\, p \cdot q = 1\big\}\ , \qquad \big\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, (n = 0 \wedge 3|m) \vee (n = 1 \wedge 2|m)\big\}\ .$$

(c) Beweisen Sie für eine Menge A und eine Familie B_i von Mengen $(i \in I)$ die Gültigkeit von

$$A \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) \;=\; \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)\ .$$

Tutoriumsaufgabe T.1: (Aussagen & Wahrheitstabellen)

(a) Stellen Sie die Wahrheitstabelle für die Aussage „entweder – oder“ auf.

Wie könnte man diese Aussage schaltungstechnisch realisieren ?

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $x < 4 \implies x < 5$ (ii) $x < 5 \implies x < 4$ (iii) $2 < 3 \implies 3 < 5$ (iv) $3 < 2 \implies 5 < 3$

(c) Überprüfen Sie für beliebige Aussagen A, B und C die Äquivalenzen:

(1) Doppelte Negation:	$\neg(\neg A)$	$\iff$	A
(2) Kommutativgesetz:	$A \wedge B$	$\iff$	$B \wedge A$
	$A \vee B$	$\iff$	$B \vee A$
(3) De Morgansche Regeln:	$\neg(A \wedge B)$	$\iff$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
	$\neg(A \vee B)$	$\iff$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
(4) Assoziativgesetz:	$(A \wedge B) \wedge C$	$\iff$	$A \wedge (B \wedge C)$
	$(A \vee B) \vee C$	$\iff$	$A \vee (B \vee C)$
(5) Distributivgesetz:	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\iff$	$A \wedge (B \vee C)$
	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\iff$	$A \vee (B \wedge C)$

Tutoriumsaufgabe T.2: (mathematische vs. natürliche Sprache)

(a) Ist der folgende Schluss logisch richtig?
(„Wer von der Quantenmechanik nicht schockiert ist, der hat sie nicht verstanden“ [Nils Bohr] *und* „Niemand versteht die Quantenmechanik“ [Richard Feynman]) $\implies$ „Niemand ist von der Quantenmechanik schockiert.“

(b) Verneinen Sie in kurzen Worten folgende Aussagen:

(i) Es gibt ein schwarzes Schaf, das gerne Salat frisst.

(ii) Alle Studierende der Analysis sind intelligent und fleißig.

(iii) In der Analysis-Vorlesung schläft Tom oder guckt aus dem Fenster.

(c) Formalisieren Sie die nachfolgenden Sprichwörter und denken Sie sich zwei weitere Beispiele aus.

(i) Alle Wege führen nach Rom.

(ii) Hunde, die bellen, beißen nicht. (iii) Wenn zwei sich streiten, freut sich der Dritte.

Wie lauten die entsprechenden Negationen?

(d) Formalisieren Sie die folgenden Konstruktionen der Alltagssprache, indem Sie geeignete Aussagen und Aussageformen definieren und diese mit Hilfe der Ihnen zur Verfügung stehenden logischen Verknüpfungen miteinander in Beziehung setzen.

(i) Ist es heiß, so schmilzt das Eis, es sei denn, ich besitze einen Eisschrank.

(ii) Zu jeder ganzen Zahl $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ existieren eindeutige ganze Zahlen $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $q \in \{0, 1\}$ derart, dass k die Summe von q und dem Doppelten von p ist.

Tutoriumsaufgabe T.3: (Aussagen mit Quantoren)

(a) Geben Sie die folgenden Aussagen in Worten an. Entscheiden Sie, ob sie wahr oder falsch sind:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ (\forall m \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$ (iv) $\exists n \in \mathbb{N}\colon\ (\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ (\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$ (v) $\forall m \in \mathbb{N}\colon\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$

(iii) $\exists n \in \mathbb{N}\colon\ (\forall m \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$ (vi) $\exists m \in \mathbb{N}\colon\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$

Begründen Sie Ihre Entscheidung gegebenenfalls mit einem Beispiel/Gegenbeispiel.

(b) Geben Sie die Verneinungen der folgenden Aussagen an:

(i) $\forall a\colon P(a)$, (ii) $\forall a\colon \neg P(a)$, (iii) $\exists a\colon P(a)$, (iv) $\exists a\colon \neg P(a)$.

(c) Geben Sie die Verneinungen der folgenden Aussagen an:

(i) $\forall a\colon \exists b\colon P(a,b)$, (ii) $\forall a\colon \forall b\colon P(a,b)$, (iii) $\exists a\colon \forall b\colon P(a,b)$, (iv) $\exists a\colon \exists b\colon P(a,b)$.

(d) Welche der folgenden Konklusionen ist richtig?

(i) $(\forall a\colon \exists b\colon P(a,b)) \implies (\exists b\colon \forall a\colon P(a,b))$ (ii) $(\exists b\colon \forall a\colon P(a,b)) \implies (\forall a\colon \exists b\colon P(a,b))$

(e) Sei $A(x)$ eine Aussageform. Verneinen Sie die Aussage $\exists! x\colon A(x)$ (sprich: „Es existiert genau ein x, so dass $A(x)$ gilt.“), welche definiert ist durch

$$(\exists x\colon A(x)) \wedge \Big(\forall x \forall y\colon \big((A(x) \wedge A(y)) \Longrightarrow x = y\big)\Big)\ .$$

Tutoriumsaufgabe T.4: (Operationen auf Mengen, Relationen)

(a) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für Durchschnitt und Vereinigung zweier nichtleerer beliebiger Mengen A und B in den Fällen

(i) $\big(\neg(A \cap B = \emptyset) \wedge \neg(A \subset B)\big) \wedge \big(\neg(B \subset A)\big)$ (ii) $A \cap B = \emptyset$ (iii) $(A \subset B) \wedge \big(\neg(A = B)\big)$

(b) Bestimmen Sie für die Mengen $A = \{a, z, 4, 1000, \emptyset, lila\}$, $B = \{gruen, lila, 1000, 4, z, Auto\}$ und $C = \{1, 2, 4, a, b, c, d, x, y, z, Fahrrad\}$ die Mengen

(i) $A \setminus B \;:=\; \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$

(ii) $A \cap (B \cap C)$ (iii) $A \cup (B \cup C)$ (iv) $C \cup (B \cap A)$ (v) $C \setminus (B \setminus A)$

(c) Das kartesische Produkt einer endlichen Menge $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ mit sich selbst können wir systematisch in der Form

$$M \times M \;=\; \left\{ \begin{array}{lllll} (m_1, m_1), & (m_1, m_2), & (m_1, m_3), & \ldots & (m_1, m_n), \\ (m_2, m_1), & (m_2, m_2), & (m_2, m_3), & \ldots & (m_2, m_n), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m_n, m_1), & (m_n, m_2), & (m_n, m_3), & \ldots & (m_n, m_n), \end{array} \right\}$$

(i) Welche Eigenschaft hat eine Relation $A \subset M \times M$, die alle Diagonalelemente aus obiger Darstellung enthält ?

(ii) Welche Eigenschaft hat eine Relation $A \subset M \times M$, die mit jedem Element (a, b) auch dasjenige Element enthält, welches im obigen Schema an der Position steht, welche durch Spiegelung der Position von (a, b) an der Diagonalen erhalten wird?

Tutoriumsaufgabe T.5: (Abbildungen und ihre Urbilder)

(a) Bestimmen Sie für die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ die folgenden Urbilder:

$$f^{-1}(\mathbb{R}),\quad f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}),\quad f^{-1}(\emptyset),\quad f^{-1}(\{1\}),\quad f^{-1}(\{0\}),\quad f^{-1}([-3, 4]),\quad f^{-1}([1, 4]).$$

Dabei heißt für eine Abbildung $f\colon A \to B$ und eine beliebige Menge $C \subset B$ die Menge $f^{-1}(C) := \{x \in A \mid f(a) \in C\}$ **Urbild von C unter f**.

(b) Beschreiben Sie die geometrischen Operationen (z.B. Spiegelung, Streckung, Verschiebung), durch welche sich die Graphen der nachfolgenden Funktionen aus dem Graphen einer vorgegebenen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ ergeben:

(i) $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -f(x)$

(ii) $g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x + 7)$

(iii) $g_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$, falls f invertierbar ist.

(iv) $g_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f\left(\frac{1}{2}x\right)$

(v) $g_5\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |f|(x)$

Unendliche Mengen und vollständige Induktion:

(a) Um auch „unendiche Mengen“ zur Verfügung zu haben, fordern wir die Existenz (mind.) einer **induktiven Menge**, d.h., das nicht-logische Axiom $\exists x : (\emptyset \in x \wedge (\forall y : y \in x \Longrightarrow (y \cup \{y\}) \in x))$.

(b) Die Menge $\mathbb{N}$ der **natürlichen Zahlen** ist der Durchschnitt aller induktiven Mengen, d.h. die kleinste induktive Menge. Anstelle von $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$ bezeichnet man die Elemente von $\mathbb{N}$ üblicherweise mit $1 := \emptyset$, $2 := \{\emptyset\}$, $3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $4 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ....

(c) Durch $s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(y) := y \cup \{y\}$, wird die sogenannte Nachfolgerabbildung auf $\mathbb{N}$ definiert, man schreibt auch kurz $n+1 := s(n)$. Um Aussagen über natürliche Zahlen der Gestalt $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ zu beweisen, genügt es, dass man $A(1)$ und $\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Longrightarrow A(n+1))$ zeigt. Diese Methode wird Beweis durch **vollständige Induktion** genannt.

Gruppen und Primzahlen:

(a) Existiert auf einer Menge $G \neq \emptyset$ eine Operation $\star \colon G \times G \to G$ mit den Eigenschaften

- $\forall k, \ell, m \in G \colon (k \star \ell) \star m = k \star (\ell \star m)$ (**Assoziativität**),
- $\exists n \in G \ \forall k \in G \colon n \star k = k \star n = k$ (**Existenz des neutralen Elements**),
- $\forall k \in G \ \exists \ell \in G \colon k \star \ell = \ell \star k = n$ (**Existenz des Inversen**),

so nennen wir das Paar $(G, \star)$ eine **Gruppe** bzw. **abelsche Gruppe**, falls zusätzlich gilt

- $\forall \ell, m \in G \colon \ell \star m = m \star \ell$ (**Kommutativität**).

(b) Eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt **Primzahl**, falls $n|p \Longrightarrow (n = 1 \vee n = p)$ gilt.

(c) Jedes $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, besitzt eine **eindeutige Primfaktorzerlegung**, d.h.,
es gibt eindeutige Primzahlen $p_1, \dots, p_m$ und Potenzen $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ mit $n = \prod_{k=1}^{m} p_k^{i_k}$.

Aufgabe 2.1:

(a) Zeigen Sie: Der Durchschnitt aller **induktiven Mengen**, d.h., der Durchschnitt aller Mengen M mit $\emptyset \in M$ und $x \in M \Longrightarrow (x \cup \{x\}) \in M$, ist selbst wieder eine induktive Menge.

(b) Ermitteln Sie die Dualzahl- und die Hexadezimalzahldarstellung der folgenden (bezüglich der Basis 10 dargestellten) natürlichen Zahlen 17, 127, 4096.

Anmerkung: Die Ziffernmenge im Hexadezimalsystem ist $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

(c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Welche natürliche Zahl ergibt sich beginnend bei $k \in \mathbb{N}$ durch n-malige Iteration der Abbildung $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(k) := k^m$?

Aufgabe 2.2:

(a) Berechnen Sie die Ausdrücke (i) $\sum_{k=3}^{10} k^2$ (ii) $\sum_{k=-3}^{3} (k+2) \cdot k$ (iii) $\sum_{k=1}^{4} \left(\prod_{l=1}^{k} 2 \right)$

(b) Zeigen Sie: Teilt die natürliche Zahl k die natürlichen Zahlen m und n, dann teilt k auch $n - m$.

(c) Zeigen Sie: Gäbe es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$, dann gäbe es unter diesen eine Primzahl, die sowohl

$$\prod_{k=1}^{n} p_k \qquad \text{als auch} \qquad \left(\prod_{k=1}^{n} p_k \right) + 1$$

teilt. Folgern Sie mittels (b), dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

(d) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 54 , 221 , 2010 und 4807 .

Körper und Äquivalenzrelationen:

(a) Zu gegebenem $m, n \in \mathbb{N}$ kann man die Gleichung $k + m = n$ für k in $\mathbb{N}$ genau dann lösen, wenn $m < n$ gilt. Damit es stets eine Lösung gibt, wird $\mathbb{N}$ zur Menge $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ der **ganzen Zahlen** erweitert und die Addition und Multiplikation darauf fortgesetzt.

(b) In $\mathbb{Z}$ ist 0 das neutrale Element der Addition, d.h. $n + 0 = n$ gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$, und jedes Element hat ein Inverses bzgl. der Addition, d.h. zu $n \in \mathbb{Z}$ existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m + n = 0$.

(c) Da die Gleichung $k \cdot m = n$ in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu vorgegebenem $m, n \in \mathbb{Z}$ im Allgemeinen keine Lösung besitzt, wird $\mathbb{Z}$ zur Menge der **rationalen Zahlen**

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p \text{ und } q \text{ teilerfremd} \right\} \cup \{0\}$$

erweitert und Addition sowie Multiplikation darauf fortgesetzt.[1]

(d) Sind auf einer Menge K zwei Operationen $\star\colon K \times K \to K$ und $\circledast\colon K \times K \to K$ gegeben, so dass $(K, \star)$ mit neutralem Element 0 und $(K \setminus \{0\}, \circledast)$ mit neutralem Element $1 \neq 0$ jeweils abelsche Gruppen bilden und gilt für diese Operationen

- $\forall k, \ell, m \in K\colon (k \star \ell) \circledast m = (k \circledast m) \star (\ell \circledast m)$ (**Distributivität**),

dann nennen wir das Tripel $(K, \star, \circledast)$ einen **Körper**.

(e) Ist $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ vorgegeben, so definiert $m \sim n :\Longleftrightarrow k|(m - n)$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, d.h. eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf $\mathbb{Z}$.

Auf der Menge $\mathbb{Z}_k$ der zugehörigen **Äquivalenzklassen** $[n] := \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m \sim n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, kann man durch $[m] + [n] := [m + n]$ und $[m] \cdot [n] := [m \cdot n]$ Addition und Multiplikation mit neutralen Elementen $[0]$ und $[1]$ definieren, so dass die $(\mathbb{Z}_k, +)$ und – falls $k = p$ eine Primzahl – ebenso die $(\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}, \cdot)$ abelsche Gruppen bilden. Insbesondere sind die $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ sogar Körper.

Aufgabe 3.1:

(a) Berechnen Sie, sofern existent, in $\mathbb{Q}$ die Ausdrücke

(i) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5}$ (ii) $\dfrac{1}{6} - \dfrac{5}{4}$ (iii) $\dfrac{1}{\frac{1}{5} - \frac{2}{11}}$ (iv) $\dfrac{1}{\frac{11}{12} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4}}$

(b) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ durch $m \sim n\colon \iff k|(m - n)$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ definiert wird.

(c) Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_k$ wohldefiniert sind.

Aufgabe 3.2:

(a) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_7$ die Ausdrücke

$$[3]_7 + [5]_7 \quad , \quad [2]_7 - [6]_7 \quad , \quad [1]_7 - [13]_7 \quad , \quad [3]_7 \cdot [4]_7 \quad , \quad ([5]_7)^{-1} \quad , \quad ([6]_7)^{-1} \quad .$$

(b) Beweisen Sie durch Rechnen in $\mathbb{Z}_2$: Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl ist ungerade.

(c) Zeigen Sie für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ und festes $m \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, dass das Produkt $[m]_p \cdot [n]_p$ bei $n = 0, 1, \ldots, p - 1$ alle Äquivalenzklassen in $\mathbb{Z}_p$ durchläuft.[2]

(d) Zeigen Sie: Ein Körper ist **nullteilerfrei**: Aus $xy = 0$ folgt zwingend, dass $x = 0$ oder $y = 0$ ist.

[1] Genau genommen bezeichnet $\mathbb{Q}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} :\Longleftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$.
[2] Dabei ist $p\mathbb{Z} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z}\colon p \cdot m = k\} = \{0, p, -p, 2p, -2p, 3p, -3p, \ldots\}$.

Ordnungsrelationen und angeordnete Körper:

(a) Eine Relation $\preceq$ auf $M \neq \emptyset$ heißt **Ordnungsrelation**, falls gilt

- $\forall x \in M\colon x \preceq x$ (**Reflexivität**)
- $\forall x, y, z \in M\colon x \preceq y \wedge y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$ (**Transitivität**)
- $\forall x, y \in M\colon x \preceq y \wedge y \preceq x \Longrightarrow x = y$ (**Antisymmetrie**)

Eine Ordnungsrelation $\preceq$ auf $M \neq \emptyset$ heißt **total**, falls für beliebige $x, y \in M$ stets $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt, also je zwei Elemente vergleichbar sind.

(b) Ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt **angeordnet**, wenn auf $\mathbb{K}$ eine totale Ordnungsrelation $\preceq$ gegeben ist, die sich mit den Körperoperationen $+$ und $\cdot$ in folgendem Sinn verträgt:

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon x \preceq y \Longrightarrow x + z \preceq y + z$,
(ii) $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon 0 \preceq x \wedge 0 \preceq y \Longrightarrow 0 \preceq x \cdot y$.

Direkt aus der Definition ergeben sich die weiteren Eigenschaften

- $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon x \preceq y \wedge z \preceq 0 \Longrightarrow y \cdot z \preceq x \cdot z$
- $\forall x \in \mathbb{K}\colon 0 \preceq x^2$
- $\forall x \in \mathbb{K}\colon 0 \preceq x \wedge 0 \neq x \Longrightarrow 0 \preceq x^{-1}$
- $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon x \preceq y \wedge 0 \preceq x \wedge 0 \neq x \Longrightarrow \frac{1}{y} \preceq \frac{1}{x}$

(c) Auf dem angeordneten Körper $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen** ist die **Betragsfunktion** definiert durch

$$|.|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$$

(d) Es gilt $\nexists x \in \mathbb{Q}\colon x^2 = 2$. Es gibt unendlich viele (angeordnete) Zwischenkörper $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{K} \subsetneq \mathbb{R}$.

Quadratische Polynome und Polynomdivision:

(a) Ob ein (normiertes, d.h. mit höchstem Koeffizienten gleich 1) quadratisches Polynom $x^2 + px + q$ Nullstellen besitzt, kann man mittels **quadratischer Ergänzung** ermittelt werden:

$$x^2 + px + q \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overbrace{x^2 + 2 \cdot \tfrac{p}{2}x + \tfrac{p^2}{4}}^{=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} \;=\; \overbrace{\tfrac{p^2}{4} - q}^{=:D(\text{iskriminante})}$$

Im Fall $D \geq 0$ erhalten wir die bekannte p-q-Formel $\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$

(b) Analog zur schriftlichen Division funktioniert die Polynomdivision (gegebenenfalls mit Rest).

Aufgabe 4.1:

(a) Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass $\subseteq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$ ist.
Ist $\subseteq$ im Allgemeinen auf $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnungsrelation?

(b) Zeigen Sie, dass Lösungen von $x^2 = 3$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegen können.

(c) Geben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung (möglichst weniger) paarweise disjunkter[3] offener, halboffener bzw. abgeschlossener Intervalle reeller Zahlen an.

(i) $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 2\right[$ (ii) $B = [3, 7] \cup [5, 6[\cup \left]\frac{11}{2}, 8\right[$ (iii) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N} \;:\; 0 < x - n < \frac{1}{3}\right\}$

[3] Dabei heißt eine Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ von Mengen A_i **paarweise disjunkt**, wenn $\forall i, j \in I\colon (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$.

Aufgabe 4.2: **(Beweise mittels vollständiger Induktion)**

(a) Was ist an folgendem „Induktionsbeweis“ für die Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 4n = 0$ falsch?

Induktionsanfang: $4 \cdot 0 = 0$.
Induktionsschluss: Gilt $4k = 0$ für alle $k < n$, so gilt auch $4n = 0$. Denn es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n = k_1 + k_2$ und $k_1, k_2 < n$, also gilt $4n = 4k_1 + 4k_2 = 0$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (i) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(c) Beweisen Sie die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon \left(n \geq 2 \implies \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \right)$

(d) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

(i) $n^3 + 2n$ durch 3 teilbar (ii) $3^n - 3$ durch 6 teilbar (iii) $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar.

(e) Ab welcher Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $n! \geq 2^n$? Führen Sie einen Induktionsbeweis.

Aufgabe 4.3: (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $\frac{|x-2|(x+2)}{x} < |x|$ erfüllen.

(b) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle ?

(i) $A := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-1}{2x+1} < \frac{1}{3} \right\}$ (ii) $B := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < \frac{3-x}{x+1} \right\}$

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit (i) $x < x^2$, (ii) $\frac{10}{x} - 3 < \frac{4}{x} + 1$, (iii) $3x^2 + 6x - 8 > 1$.

(d) Lösen Sie über dem Körper der reellen Zahlen die folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie die Lage der jeweiligen Lösungsmenge auf der x-Achse:

(i) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x \leq x - \frac{7}{6}$ (ii) $\frac{5}{2}(x-3) \leq (x-3)$ (iii) $|x^2 - 4| - |x+2|(x^2 + x - 6) > 0$

(e) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(i) $|x+3| + |x-3| > 8$ (ii) $x(2-x) > 1 + |x|$ (iii) $\left| \frac{x}{x+1} \right| > \frac{x}{x+1}$

Aufgabe 4.4: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) $|7 - |x-5|| \leq 3$ (b) $|x^2 - 4x + 3| \leq |x^2 - 4|$ (c) $|x+1| - |x| + |x-1| < 2$

(d) $|x^2 + x - 2| < x$ (e) $\frac{x+1}{x} \leq |x|$ (f) $|x+2| - |x-2| \geq 2$ (g) $||x+1| - 2| \leq 1$

Aufgabe 4.5: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) $\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}$ (b) $(x-1)^2 - 2 \geq |x|$ (c) $|3-x| \geq 2$ (d) $\big||3-x| - 2\big| \leq |x-1|$

Aufgabe 4.6:

(a) Führen Sie die Polynomdivisionen $(x^4 - 1) : (x - 1)$ und $(x^4 - 36) : (x^2 - 2x + 3)$ durch.

(b) Finden Sie jeweils die Menge aller Nullstellen über dem Körper $\mathbb{K}$ und bestimmen Sie die Vielfachheit jeder Nullstelle. Verwenden Sie auch die Methode der quadratischen Ergänzung.

(i) $x + \pi$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
(ii) $x^2 - 2$ sowie $x^2 + 2x - 8$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
(iii) $x^3 - x^2 + x - 1$ und $x^3 - x^2 - x + 1$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
(iv) $x^4 - 8x^2 - 9$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
(v) $x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 27x^2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ (vi) $x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Hinweis: Besitzt ein Polynom mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ eine Nullstelle $a \in \mathbb{Q}$, so ist $a \in \mathbb{Z}$.

Tutoriumsaufgabe T.6: (Rechnen in $\mathbb{Q}$)

(a) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(i) $S_1 := [7m - (5n + 3)] - [-(6n + 7) + 5m - (3n - 2)]$

(ii) $S_2 := (-12a + 20b)15x - 20x(14b - 9a)$

(iii) $S_3 := 10ab(8a - 4b + 5c) - (15a + 12b - 9c)5ab$

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Potenzen:

$(2x)^2,\ (-2x)^2,\ 2(-x)^2,\ -2(-x^2),\ (2x)^3,\ (-2x)^3,\ 2(-x)^3,\ -2(-x)^3$

(c) Multiplizieren Sie aus und/oder fassen Sie zusammen:

(i) $T_1 := (-a - 2b)(a + 3b)$ (ii) $T_2 := (c + b)(c - b + 2)$

(iii) $T_3 := 35 - (11 - 5x)(3 - 2x^2) + 2x^2 + 3x^2 - 4x$

(d) Bestimmen Sie $\boxed{?}$ in

(i) $\dfrac{x + 2y}{x - y} = \dfrac{\boxed{?}}{x^2 - y^2}$ (ii) $\dfrac{5a + 3b}{5a - 3b} = \dfrac{25a^2 - 9b^2}{\boxed{?}}$ (iii) $\dfrac{2x + y}{x + y} = \dfrac{4x^2 + 4xy + y^2}{\boxed{?}}$

(e) Kürzen Sie die folgenden Brüche:

(i) $\dfrac{8xy + 4xz}{2x}$ (ii) $\dfrac{ax - ay}{ax^2 - ay^2}$ (iii) $\dfrac{8x^3y^2 - 6x^2y^3}{24x^2y^2}$ (iv) $\dfrac{r^2 - 10rs + 25s^2}{r^2 - 25s^2}$

Tutoriumsaufgabe T.7: Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

(a) $(2a^2 + 18a - 20) : (a + 10)$ (b) $(8a^2 - 10a - 3) : (2a - 3)$ (c) $(x^3 + y^3) : (x + y)$

(d) $(5p^2 + 3pq + 9p + 6q - 2) : (5p + 3q - 1)$

Tutoriumsaufgabe T.8: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{D} \colon S(x) = T(x)\}$ für:

(a) $\sqrt{x} = 5$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$,

(b) $\dfrac{x^3}{x} = 4$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(c) $bx + c = 0$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine lineare Gleichung*),

(d) $x^2 = a$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine quadratische Gleichung ohne lineares Glied*),

(e) $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine quadratische Gleichung*),

(f) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = -x$ auf $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, (g) $\sqrt{x} = 2 - x$ auf $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$.

Polynome und Vektorräume:

- Ein **Polynom** vom **Grad** $n \in \mathbb{N}_0$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit **Koeffizienten** $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, a_n \neq 0_{\mathbb{K}}$, besitzt die Gestalt
$$p(x) \ := \ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ = \ a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ .$$
- Die Nullabbildung $p_0 \colon x \mapsto 0$ heißt **Nullpolynom** – ihm ordnen wir den Grad $-\infty$ zu.
- Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein beliebiger Körper. Wir betrachten die Menge
$$\Pi_n \ := \ \left\{ p(x) \ \middle| \ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{K}, k = 0, \ldots, n \right\}$$
- Auf dieser Menge Π_n definieren wir eine **additive Verknüpfung** $\oplus \colon \Pi_n \times \Pi_n \to \Pi_n$ für beliebige $p, \tilde{p} \in \Pi_n$ durch
$$\big(p, \tilde{p}\big) \mapsto p(x) \oplus \tilde{p}(x) \ := \ \sum_{k=0}^{n} (a_k + \tilde{a}_k) x^k \ ,$$
mit welcher $(\Pi_n, \oplus)$ zu einer abelschen Gruppe wird.
- Desweiteren betrachten wir für beliebige $\alpha \in \mathbb{K}$ und beliebige $p \in \Pi_n$ eine weitere Verknüpfung $\bullet \colon \mathbb{K} \times \Pi_n \to \Pi_n$, definiert durch
$$\big(\alpha, p\big) \mapsto \alpha \bullet p(x) \ := \ \sum_{k=0}^{n} (\alpha \cdot a_k) x^k \ .$$
- Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, \oplus)$ eine abelsche Gruppe. Dann heißt V ein **Vektorraum über** $\mathbb{K}$ (kurz $\mathbb{K}$-Vektorraum), falls es eine äußere Verknüpfung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ gibt mit:
  (a) $\forall v \in V \ : \ 1_{\mathbb{K}} \bullet v = v$ (Einselement)
  (b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v \in V \colon (\alpha \cdot \beta) \bullet v \ = \ \alpha \bullet (\beta \bullet v)$ (Assoziativität)
  (c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v, w \in V \colon (\alpha + \beta) \bullet v \ = \ (\alpha \bullet v) \oplus (\beta \bullet v)$ und $\alpha \bullet (v \oplus w) \ = \ (\alpha \bullet v) \oplus (\alpha \bullet w)$
- Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann $\mathbb{R}^3$ mit Π_2 identifiziert werden durch die eineindeutige (und mit den Verknüpfungen sogar verträgliche) Zuordnung $\Pi_2 \ni a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mapsto (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$

Aufgabe 5.1:

(a) Zeigen Sie: Für $1 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. (Pascalsches Dreieck)

(b) Beweisen Sie mittels (a) die **Binomialformel** $\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon (a+b)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(c) Gegeben seien die Polynome $p(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, $q(x) = -4x^5 + x^4 - 13x$ sowie $u(x) = 4$.
  (i) Bestimmen Sie die Polynome $p(x)+q(x)$, $p(x)+u(x)$ sowie $p(x)q(x)$, $p(x)u(x)$ und $p(x)p_0(x)$.
  (ii) Geben Sie jeweils den Grad der Polynome aus (i) an.
  (iii) Bestimmen Sie jeweils das additive Inverse der Polynome aus (i).
  (iv) Geben Sie eine Grad-Formel für die Summe zweier Polynome an.

Aufgabe 5.2:

(a) Überprüfen Sie, ob die Menge $\{f \mid f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ mit sinnvollen Verknüpfungen einen linearen Raum bildet.

(b) Zeigen Sie, dass der aus der Schule bekannte Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die von uns eingeführte Definition eines linearen Raumes erfüllt.[4]

[4]Dieser kann mit dem Raum der Polynome höchstens zweiten Grades über deren Koeffizienten identifiziert werden und somit als Unterraum von $\{f \mid f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ interpretiert werden.

Lineare Abbildungen, Skalarprodukte, Matrizen und lineare Gleichungssysteme:

- Sei V ein beliebiger $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren.
  (a) Unter einer **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ verstehen wir einen Vektor
  $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \qquad \text{mit} \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\,.$$
  (b) Eine Menge $\{v_k \mid k = 1, \dots, n\}$ heißt **linear unabhängig**, wenn für jede Linearkombination mit $\sum \alpha_k v_k = 0_V$ schon $a_k = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$ folgt.
  (c) Eine linear unabhängige Menge $\{v_k \mid k = 1, \dots, n\}$ heißt **Basis** von V, wenn sich jedes Element von V als (sogar eindeutige) Linearkombination der v_k schreiben lässt.
- **Satz:** Jeder Vektorraum hat eine Basis. **Satz:** Jede Basis von $\mathbb{R}^n$ hat genau n Elemente.
- Die Dimension eines Vektorraumes bestimmt sich über die Anzahl der Basiselemente.
- Bei der Multiplikation von Polynomen gilt: $\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$
- Eine Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt **linear**, wenn
  $$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\colon \forall v, w \in \mathbb{R}^n\colon A(\lambda v + \mu w) \;=\; \lambda A(v) \;+\; \mu A(w)$$
- Eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt
  – **injektiv** $:\Longleftrightarrow \forall v, w \in \mathbb{R}^n\colon\ (A(v) = A(w) \Longrightarrow v = w)$;
  – **surjektiv** $:\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^m\colon \exists v \in \mathbb{R}^n\colon A(v) = y$;
  – **bijektiv** $:\Longleftrightarrow$ A injektiv und surjektiv.
- Die Menge $\{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0_{\mathbb{R}^m}\}$ heißt **Kern** von A.
- $v^{\mathrm{T}} := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix}$ heißt der zu v **transponierte** Vektor.
- Die durch $v^{\mathrm{T}} w := \sum_{k=1}^{n} v_k w_k$ definierte Verknüpfung $\cdot\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **Innenprodukt** oder **Skalarprodukt** auf $\mathbb{R}^n$.
- Für eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ zwischen zwei beliebigen Vektorräumen V und W sei $\mathrm{Bild}(A) := \{w \in W \mid \exists v \in V\colon A(v) = w\}$ das **Bild**.

Aufgabe 6.1: Wählen Sie sich zwei beliebige konkrete Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ aus.

(a) Bestimmen Sie die Innenprodukte $v^{\mathrm{T}} w$ und $w^{\mathrm{T}} v$. Was fällt Ihnen auf ?

(b) Überprüfen Sie, ob v und w linear unabhängig sind. Können v und w eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden ?

(c) Wählen Sie sich eine beliebige konkrete Abbildung $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und wenden Sie diese auf die Vektoren v und w an. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Abbildung A auf die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ anwenden ? Bestimmen Sie weiterhin sowohl das Bild als auch den Kern von A.
Untersuchen Sie, ob A injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

Aufgabe 6.2:

(a) Betrachten Sie ein beliebiges selbstgwähltes lineares Gleichungssystem, bestehend aus 3 Gleichungen und 3 Unbekannten. Versuchen Sie dieses systematisch zu lösen.

(b) Führen Sie (a) noch einmal mit Hilfe der Matrix-Vektor-Schreibweise durch.

(c) Besitzt das Gleichungssystem $Ax = 0$ immer eine Lösung ?
Falls ja, hat diese Menge eine gewisse Struktur ?

(d) Diskutieren Sie die Lösbarkeit eines allgemeinen linearen Systems $Ax = b$.

Der Körper der komplexen Zahlen und Abstandsbegriffe:

(a) Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^2$ mit den beiden Verknüpfungen $\oplus, \otimes \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche definiert seien durch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix}.$$

(b) **Satz**: Es ist $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ ein Körper. **Diesen nennen wir** $\mathbb{C}$. Es gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) Kürzen wir den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit i ab und identifizieren wir die reellen Zahlen r mit den Vektoren $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$, so lässt sich jedes Element eindeutig als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben. Es folgt also $\mathrm{i}^2 = -1$.

(d) Sei V ein ($\mathbb{R}$-)Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|.\| \colon V \to \mathbb{R}$ mit

(i) $\forall v \in V \colon \|v\| = 0 \iff v = 0_V$ (**Definitheit**)
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall v \in V \colon \|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ (**Homogenität**)
(iii) $\forall v, w \in V \colon \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (**Dreiecksungleichung**)

Aufgabe 7.1:

(a) Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die folgenden Matrix-Vektor-Multiplikationen berechnen ?

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie das Matrizenprodukt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
Was können wir im Fall $(a, b) \neq (0, 0)$ sehen ?
Welche Struktur hat die Menge aller dieser Matrizen mit der Matrizenmultiplikation ?

(c) Verwenden Sie (b) um auf das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl zu schließen.

Aufgabe 7.2: Berechnen Sie und tragen Sie die Ergebnisse in die Gaußsche Zahlenebene ein.

(a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\mathrm{i}\right)(12 + 18\mathrm{i})$. (b) $\frac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^3}$ (c) $\frac{(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^4}$

Aufgabe 7.3:

Seien $\mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\mathbf{w} := (1, 4)$ beziehungsweise $\mathbf{x} := (-3, 2)$ und die Vektoren $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ durch $\mathbf{y} = (-2, 2, 1)$ beziehungsweise $\mathbf{z} = (0, 1, 0)$.

(i) Berechnen Sie $\mathbf{w} + 2\mathbf{x}$ und $3\mathbf{z} - \mathbf{y}$ jeweils einmal rechnerisch und einmal zeichnerisch.
(ii) Berechnen Sie für jeden der oben definierten Vektoren $\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ jeweils seine Länge in den Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$, welche auf dem $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ definiert sind durch

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{k=1,\ldots,n} |x_k|$$

Aufgabe 7.4:

(a) Bestimmen Sie die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für welche die Ungleichung $\big|2|x| - 1\big| \leq 3$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle x mit $\big|x - |x|\big| \leq 1$. (c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 2| + 2 \leq \frac{4}{x}$.

Was noch so alles kommt . . . :

(a) Für Polynome $p(x)$, $q(x)$ mit $\deg(q(x)) = m > n = \deg(p(x))$ heißt eine Funktion der Gestalt

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$$

gebrochen rationale Funktion (vgl. Polynomdivision mit Rest).

(b) Zur Vereinfachung gibt es in Abhängigkeit der Vielfachheit der Nullstellen des Nennerpolynoms verschiedene Ansätze für eine **Partialbruchzerlegung**.

(c) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen a, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $n > N$ auch $|x_n - a| < \varepsilon$ folgt. Dann heißt a der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wir schreiben

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = a\ .}$$

(d) Eine Funktion $f\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in [c, d]$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in [c, d]$ aus $|x - a| < \delta$ auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ folgt. Wir schreiben

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ ,}$$

denn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $[c, d]$ mit a als Grenzwert ist dann auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $f(a)$.

(e) Eine Funktion $f\colon]c, d[\to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $a \in]c, d[$, falls es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $h \neq 0$ aus $|h| < \delta$ auch $\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - b\right| < \varepsilon$.

(f) Wir schreiben

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = b =: f'(a)}$$

(g) Ableitungsregeln: **Satz: [Algebraische Differentiationsregeln]**

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, \lambda f, fg\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in D$ gelten

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) \qquad (\textbf{Linearität}) \tag{8.1}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (\textbf{Produktregel}) \tag{8.2}$$

Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in D$ gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{\big(g(x)\big)^2} \qquad (\textbf{Quotientenregel}) \tag{8.3}$$

Satz [Ableitung der Umkehrfunktion]: Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x mit $f'(x) \neq 0$ und besitzt f in der Umgebung von x die Umkehrfunktion f^{-1}, dann gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(f(x))\right)}\ , \quad \text{also} \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}\ . \tag{8.4}$$

Satz [Kettenregel]:

Sind $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$ und ist f differenzierbar in $x \in D$ und g differenzierbar in $y := f(x) \in E$, dann ist die Komposition $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ (sprich: „g nach f“) ebenfalls differenzierbar in x mit

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)\ . \tag{8.5}$$

Aufgabe 8.1: (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte (i) $\dfrac{2n^3+n^2-5}{(n+1)^3}$ (ii) $\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2+3}$

(b) Zeigen Sie für konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Rechenregeln

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) \;=\; \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \;=\; \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) .$$

Aufgabe 8.2:

(a) Zeigen Sie die Stetigkeit von konstanten und linearen Funktionen sowie die Stetigkeit von Summen, Produkten und Hintereinanderausführungen stetiger Funktionen.

(b) Zeigen Sie die Unstetigkeit von nichtkonstanten Treppenfunktionen.

(c) Zeigen Sie, dass differenzierbare Funktionen auch stetig sind.

(d) Zeigen Sie die Produktregel (8.2). **Bonus:** Was hat diese mit partieller Integration zu tun ?

(e) Zeigen Sie die Kettenregel (8.5). **Bonus:** Was hat diese mit der Substitutionsregel zu tun ?

Aufgabe 8.3:

(a) Berechnen Sie die Ableitungen von: (i) $(x+3)^{27}\cdot x^4$ (ii) $\ln(x^2+1)$ (iii) $\dfrac{x+1}{x^2+6}$ (iv) $\arctan(x)$

(b) Bestimmen Sie Stammfunktionen von: (i) $(x^3+2x+1)^{11}\cdot(3x^2+2)$ (ii) $x\ln(x)$ (iii) $\dfrac{2x+3}{x^2+1}$

Alle Übungsaufgaben sind verfügbar unter: `https://studip.uni-rostock.de/studip/`