Aussagen und Quantoren:

(a) Mit Hilfe von Symbolen für **Variablen**, **Konstanten**, **Funktionen** und **Relationen** kann man **Terme** und **Aussagen** bilden:

- Jede Variable und jede Konstante ist ein Term. Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme und ist f eine n-stellige Funktion, so ist auch $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term.
- Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme und ist R eine n-stellige Relation, dann ist $R(t_1, \dots, t_n)$ eine Aussage, in der alle vorkommenden Variablen frei sind.

(b) Aus vorhandenen Aussagen kann man mittels logischer Symbole neue Aussagen bilden: Sind A und B Aussagen, dann sind auch

- $A \vee B$ („A oder B“) **Vorsicht:** Damit ist kein exklusives „Oder“ gemeint.
- $A \wedge B$ („A und B“)
- $\neg A$ („nicht A“) sowie $A \Longrightarrow B$ („A impliziert B“, d.h., „aus A folgt B“)

Aussagen. Abkürzend führt man noch $A \Longleftrightarrow B$ („A ist äquivalent zu B“, d.h., „A gilt genau dann, wenn B gilt“) an Stelle von $(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$ ein.

(c) Logische Axiome werden durch die folgenden Wahrheitstafeln festgelegt:

A	B	$A \Longrightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
w	w	w	w	w	f
w	f	f	f	w	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	f	f	w

(d) Ist x eine freie Variable in der Aussage A, so erlaubt man sich auch, mittels der Quantoren $\forall$ und $\exists$ die Aussagen $\forall x : A(x)$ („für jedes x gilt $A(x)$“) und $\exists x : A(x)$ („es gibt ein x, für das $A(x)$ gilt“) zu bilden, und in diesen ist dann x keine freie Variable mehr, sondern gebunden.

Mengen und Abbildungen

(a) In der Mengenlehre gibt man sich das zweistellige Relationssymbol $\in$ vor, mit dessen Hilfe man Aussagen wie $x \in y$ („x ist Element von y“) formen kann.

(b) Ist $A(x)$ eine Aussage mit freier Variable x, so bezeichnet $\{x \mid A(x)\}$ die **Ansammlung (Klasse)** aller x, für welche die Aussage $A(x)$ wahr ist. Als grundlegendes nicht-logisches Axiom gibt man sich $(y \in \{x \mid A(x)\}) \Longleftrightarrow A(y)$ vor. **Mengen** sind spezielle Ansammlungen. Beispielsweise

- ist die **leere Menge** $\{\} := \emptyset := \{x | x \neq x\}$ eine Menge,
- ist mit zwei Mengen x, y die **Paarmenge** $\{x, y\} := \{z \mid (z = x) \vee (z = y)\}$ eine Menge,
- ist mit einer Menge x bei $z \subset x$, d.h. $\forall u$: $(u \in z \Longrightarrow u \in x)$, auch z eine Menge (**Teilmenge von** x genannt),
- sind mit zwei Mengen x, y auch $x \cup y := \{u \mid u \in x \vee u \in y\}$ (welche **Vereinigung** genannt wird) und $x \cap y := \{u \mid u \in x \wedge u \in y\}$ (welche **Durchschnitt** genannt wird) Mengen,
- ist mit einer Menge x auch $\mathcal{P}(x) := \{z \mid z \subset x\}$ eine Menge (**Potenzmenge** genannt).

(c) In analoger Weise wie Paarmengen kann man **geordnete Paare** und damit auch das **Produkt** $M \times N := \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$ zweier Mengen M, N definieren.

(d) Eine **Abbildung** $f \colon M \to N$ ist eine Teilmenge $R \subset M \times N$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Aufgabe 1.1: Die vorkommenden Symbole seien wie in der Schule zu interpretieren:

(a) Welche der folgenden Ausdrücke sind Terme, welche Aussagen ?

$$x - y\ , \qquad x = y + z\ , \qquad x \geq 3x\ , \qquad 5 \Longrightarrow (x = 2)\ ,$$
$$4 \leq 1\ , \qquad (3x = 2) \wedge (x \geq 5)\ , \qquad (x = y) \Longrightarrow (x = 2y)\ .$$

(b) Welche der folgenden Ausdrücke sind Aussagen, welche der auftretenden Variablen sind frei ?

(i) $(x \leq 4) \wedge (x > 3 \Longrightarrow x = 4)$

(ii) $\forall y\colon ((x = y) \Longrightarrow (x \leq y))$

(iii) $\forall x\colon \exists y\colon (x \leq y)$

(iv) $\forall x\colon \exists y\colon \exists x\colon x = y$

Lösung:

(a) Für die obigen Ausdrücke gelten:

- $x - y$ ist ein Term,
- $x = y + z$ ist eine Aussage,
- $x \geq 3x$ ist eine Aussage,
- $5 \Longrightarrow (x = 2)$ ist weder ein Term noch eine Aussage,
- $4 \leq 1$ ist eine Aussage,
- $(3x = 2) \wedge (x \geq 5)$ ist eine Aussage,
- $(x = y) \Longrightarrow (x = 2y)$ ist eine Aussage.

(b) Es gelten

- $(x \leq 4) \wedge (x > 3 \Longrightarrow x = 4)$ ist eine Aussage mit freier Variable x,
- $\forall y : ((x = y) \Longrightarrow (x \leq y))$ ist eine Aussage mit freier Variable x,
- $\exists x : \forall y : (x \leq y)$ ist eine Aussage ohne freie Variable,
- $\forall x : \exists y : \exists x : x = y$ ist keine Aussage (da die Aussage $\exists y : \exists x : x = y$ keine freie Variable enthält, insbesondere also die schon vorkommende Variable x nicht nochmal gebunden werden darf).

Aufgabe 1.2:

(a) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien, d.h., für beliebige Aussagen A, B wahr?

(i) $A \Longrightarrow A$ (ii) $(A \vee B) \Longrightarrow B$ (iii) $(A \wedge B) \Longrightarrow A$ (iv) $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$

(b) Beweisen Sie, dass aus $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow C$ die Aussage $A \Longrightarrow C$ folgt.

Anmerkung: Die auf dieser Tautologie basierende Beweistechnik nennt man **direkten Beweis**.

(c) Beweisen Sie, dass aus B und $\neg A \Longrightarrow \neg B$ die Aussage A folgt.

Anmerkung: Die auf dieser Tautologie basierende Beweistechnik nennt man einen **indirekten Beweis** oder auch einen **Widerspruchsbeweis**.

Lösung:

(a) Wir überprüfen die Aussagen anhand von Wahrheitstafeln

(i) Nach den Wahrheitstafeln sind sowohl $w \Longrightarrow w$ und $f \Longrightarrow f$ wahre Aussagen, also ist $A \Longrightarrow A$ für jede Belegung von A wahr.

(ii) + (iii) + (iv) Aus den Wahrheitstafeln ergeben sich

A	B	$\overbrace{A \vee B}^{C:=}$	$C \Longrightarrow B$	$\overbrace{A \wedge B}^{D:=}$	$D \Longrightarrow A$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	w
f	w	w	w	f	w
f	f	f	w	f	w

und

A	B	$\overbrace{B \Longrightarrow A}^{E:=}$	$A \Longrightarrow E$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	f	w
f	f	w	w

Also ist die Aussage $A \vee B \Longrightarrow B$ aufgrund der zweiten Zeile NICHT für alle A, B wahr. Dagegen sind die Aussagen $(A \wedge B) \Longrightarrow A$ und $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$ jeweils für alle A, B wahr.

(b) Mit Hilfe der Wahrheitstafeln erhält man

A	B	C	$D := (A \Longrightarrow B)$	$E := (B \Longrightarrow C)$	$F := (D \wedge E)$	$G := (A \Longrightarrow C)$	$F \Longrightarrow G$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	f	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

also gilt, dass aus $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow C$ die Aussage $A \Longrightarrow C$ folgt.

(c) Mit Hilfe der Wahrheitstafeln erhält man

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$C := (\neg A \Longrightarrow \neg B)$	$D := (B \wedge C)$	$D \Longrightarrow A$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	w	f	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	w	w	f	w

also gilt, dass aus B und $\neg A \Longrightarrow \neg B$ die Aussage A folgt.

Aufgabe 1.3:

(a) Ein Barbier sei definiert als jemand, der genau diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Wer rasiert den Barbier? Beantworten Sie diese Frage im Hinblick auf das Russelsche Paradoxon.

(b) Weisen Sie nach, dass das in der Mengenlehre durch $x = y :\Longleftrightarrow \forall a : (a \in x \Longleftrightarrow a \in y)$ definierte Relationssymbol $=$ die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation besitzt, d.h.,

(i) für alle Mengen x gilt: $x = x$ (Reflexivität),

(ii) für alle Mengen x gilt: $x = y \Longrightarrow y = x$ (Symmetrie) und

(iii) für alle Mengen x, y, z gilt: $((x = y) \wedge (y = z)) \Longrightarrow x = z$ (Transitivität).

(c) Zeigen Sie, dass $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ eine Menge ist, die man wirklich als geordnetes Tupel (a, b) interpretieren kann, also dass $(a, b) = (c, d)$ genau dann gilt, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt. Damit wird das **kartesische Produkt** $A \times B$ von zwei Mengen A und B definiert durch

$$A \times B := \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\} \ .$$

Lösung:

(a) Wie in der Mengenlehre ergibt sich auch hier das Paradoxon, dass der Barbier sich genau dann selbst rasisert, wenn er sich nicht selbst rasiert.
Versucht man, dieses Paradoxon wie in der Mengenlehre durch Unterscheidung von Ansammlungen (Klassen) und Mengen aufzulösen, so könnte man daran denken, nur über Einwohner eines Dorfes zu sprechen. Dann würde der Widerspruch nur ergeben, dass der Barbier nicht Einwohner des Dorfes sein kann.

(b) (i) Da für jede Menge x die Aussage $\forall a\colon (a \in x \Longleftrightarrow a \in x)$ gilt, gilt auch $\forall x\colon x = x$.

(ii) Die Aussage $x = y$ gilt nach Definition von $=$ genau dann, wenn $\forall a\colon (a \in x \Longleftrightarrow a \in y)$ gilt. Aufgrund der Definition von $\Longleftrightarrow$ ist dies genau dann der Fall, wenn $\forall a\colon (a \in y \Longleftrightarrow a \in x)$ gilt, und dies gilt nach Definition von $=$ genau dann, wenn $y = x$ gilt.

(iii) Gelte $x = y$ und $y = z$. Ist $a \in x$, dann gilt wegen $x = y$ auch $a \in y$, und somit wegen $y = z$ auch $a \in z$. Ist umgekeht $a \in z$, dann gilt wegen $z = y$ (hier wurde schon die Symmetrie benutzt) auch $a \in y$, und somit wegen $y = x$ (wieder wurde die Symmetrie benutzt) auch $a \in x$. Also folgt aus $a \in x$ auch $a \in z$, und umgekehrt aus $a \in z$ auch $a \in x$. Somit gilt $\forall a : (a \in x \Longleftrightarrow a \in z)$ und daher (nach Definition von $=$) auch $x = z$.

(c) Zunächst einmal ist $\{\{a\},\{a,b\}\}$ Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ und als solche eine Menge.
Dann bemerken wir, dass $x = a$ äquivalent zu $\forall y : (y \in (a,b) \Longrightarrow x \in y)$ ist, denn das einzige gemeinsame Element der Mengen $\{a\}$ und $\{a,b\}$ ist a.
Gelte nun $(a,b) = (c,d)$, dann folgt

$$x = a \Longleftrightarrow (\forall y : (y \in (a,b) \Longrightarrow x \in y)) \Longleftrightarrow (\forall y : (y \in (c,d) \Longrightarrow x \in y)) \Longleftrightarrow x = c \quad .$$

Also ist $a = c$ und $(a,b) = (a,d)$. Damit gilt $\{a,b\} \in \{\{a\},\{a,d\}\}$ und analog $\{a,d\} \in \{\{a\},\{a,b\}\}$.
Ist nun $a = b$, dann folgt $\{a,d\} \in \{\{a\},\{a\}\}$ und daher $d = a = b$. Ist andererseits $a \neq b$, dann folgt $\{a,b\} = \{a,d\}$, und daher dann auch $b = d$ nach dem Extensionalitätsaxiom.

Aufgabe 1.4:

(a) Eine zweistellige Relation auf einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subset A \times A$.
Diese nennt man transitiv, wenn mit $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ auch $(x,z) \in R$ gilt.
Geben Sie alle transitiven Relationen auf der Menge $A := \{1,2\}$ an.

(b) Welche der folgenden Relationen R sind Abbildungen ? Wie lautet gegebenenfalls die zugehörige Zuweisungsvorschrift (vorkommende Symbole sind wie in der Schule zu interpretieren)?

$$\Big\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\Big|\, m - n = 0\Big\} \ , \qquad \Big\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\Big|\, (n = 0 \wedge 3|m) \vee (n = 1 \wedge 3 \nmid m)\Big\} \ ,$$

$$\Big\{(p,q) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \,\Big|\, p \cdot q = 1\Big\} \ , \qquad \Big\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\Big|\, (n = 0 \wedge 3|m) \vee (n = 1 \wedge 2|m)\Big\} \ .$$

(c) Beweisen Sie für eine Menge A und eine Familie B_i von Mengen $(i \in I)$ die Gültigkeit von

$$A \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) \ = \ \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i) \ .$$

Lösung:

(a) Die folgenden Relationen auf $A = \{1,2\}$ sind transitiv:
$R = \emptyset$, $R = \{(1,1)\}$, $R = \{(2,2)\}$, $R = \{(1,2)\}$, $R = \{(2,1)\}$,
$R = \{(1,1),(1,2)\}$, $R = \{(1,1),(2,1)\}$, $R = \{(1,1),(2,2)\}$, $R = \{(1,2),(2,2)\}$, $R = \{(2,1),(2,2)\}$,
$R = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$, $R = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$, $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$
Man kann Sie sich beispielsweise durch ein Pfeildiagramm mit den vier Knoten $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ und $(2,2)$ veranschaulichen.

(b)
- $\Big\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\Big|\, m - n = 0\Big\}$ ist der Graph der Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m) = m$.
- $\Big\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\Big|\, (n = 0 \wedge 3|m) \vee (n = 1 \wedge 3 \nmid m)\Big\}$ ist Graph der Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 3|m \\ 1 & \text{falls } 3 \nmid m \end{cases}$.
- $\Big\{(p,q) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \,\Big|\, p \cdot q = 1\Big\}$ ist kein Graph einer Abbildung, denn zur rationalen Zahl $p = 0$ gibt es kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $p \cdot q = 1$. Allerdings ist $\Big\{(p,q) \in (\mathbb{Q}\setminus\{0\})\times\mathbb{Q} \,\Big|\, p \cdot q = 1\Big\}$ Graph der Abbildung $f : \mathbb{Q}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}$, $f(p) = \frac{1}{p}$.
- $R := \Big\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\Big|\, (n = 0 \wedge 3|m) \vee (n = 1 \wedge 2|m)\Big\}$ ist kein Graph einer Abbildung, denn sowohl $(6,0) \in R$ als auch $(6,1) \in R$.

(c) Nach dem Extensionalitätsaxiom hat man zu zeigen, dass $x \in A \setminus (\bigcup_i B_i)$ äquivalent zu $x \in \bigcap_i (A \setminus B_i)$ ist. Nun ist $x \in A \setminus (\bigcup_i B_i)$ äquivalent zu $x \in A$ und $\neg\exists i : x \in B_i$, also zu $x \in A$ und $\forall i : x \notin B_i$. Dies ist aber äquivalent zu $\forall i : ((x \in A) \wedge (x \notin B_i))$, also zu $x \in \bigcap_i (A \setminus B_i)$.

Tutoriumsaufgabe T.1: (Aussagen & Wahrheitstabellen)

(a) Stellen Sie die Wahrheitstabelle für die Aussage „entweder – oder“ auf.

Wie könnte man diese Aussage schaltungstechnisch realisieren ?

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $x < 4 \Longrightarrow x < 5$ (ii) $x < 5 \Longrightarrow x < 4$ (iii) $2 < 3 \Longrightarrow 3 < 5$ (iv) $3 < 2 \Longrightarrow 5 < 3$

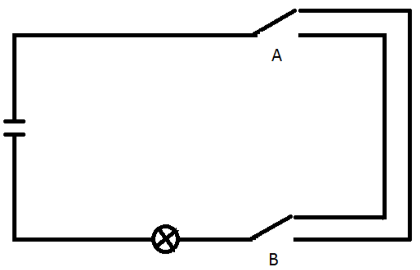
(c) Überprüfen Sie für beliebige Aussagen A, B und C die Äquivalenzen:

(1) Doppelte Negation:	$\neg(\neg A)$	$\Longleftrightarrow$	A
(2) Kommutativgesetz:	$A \wedge B$	$\Longleftrightarrow$	$B \wedge A$
	$A \vee B$	$\Longleftrightarrow$	$B \vee A$
(3) De Morgansche Regeln:	$\neg(A \wedge B)$	$\Longleftrightarrow$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
	$\neg(A \vee B)$	$\Longleftrightarrow$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
(4) Assoziativgesetz:	$(A \wedge B) \wedge C$	$\Longleftrightarrow$	$A \wedge (B \wedge C)$
	$(A \vee B) \vee C$	$\Longleftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$
(5) Distributivgesetz:	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\Longleftrightarrow$	$A \wedge (B \vee C)$
	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\Longleftrightarrow$	$A \vee (B \wedge C)$

Lösung:

(a) Die Aussage „Entweder A oder B“ lässt sich darstellen durch

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge B$	$A \wedge \neg B$	$(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B$
w	w	f	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	f	f
f	f	w	w	w	f	w



Mit Wechselschaltern ließe sich das schnell realisieren, etwa in folgender Weise:

(b) (i) wahr (ii) falsch, denn es gilt z.B. $4 < 5 \ \wedge \ \neg(4 < 4)$ (iii) wahr (iv) wahr

(c) Die Äquivalenz (1) folgt aus

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
w	f	w
f	w	f

und die Äquivalenzen (2) folgen direkt aus der Definition. Die Morganschen Regeln (3) gelten wegen

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	f	f	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	w	f	f
f	f	w	w	f	w	w	f	w	w

Die Assoziativität (4) folgt wegen

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f	f	w	w	w	w
w	f	f	f	f	f	f	w	w	f	w
f	w	w	f	f	w	f	w	w	w	w
f	w	f	f	f	f	f	w	w	w	w
f	f	w	f	f	f	f	f	w	w	w
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f

Analog folgen die Distributivgesetze aufgrund von

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

und

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Tutoriumsaufgabe T.2: (mathematische vs. natürliche Sprache)

(a) Ist der folgende Schluss logisch richtig?
(„Wer von der Quantenmechanik nicht schockiert ist, der hat sie nicht verstanden“ [Nils Bohr] *und* „Niemand versteht die Quantenmechanik“ [Richard Feynman]) $\Longrightarrow$ „Niemand ist von der Quantenmechanik schockiert.“

(b) Verneinen Sie in kurzen Worten folgende Aussagen:

(i) Es gibt ein schwarzes Schaf, das gerne Salat frisst.
(ii) Alle Studierende der Analysis sind intelligent und fleißig.
(iii) In der Analysis-Vorlesung schläft Tom oder guckt aus dem Fenster.

(c) Formalisieren Sie die nachfolgenden Sprichwörter und denken Sie sich zwei weitere Beispiele aus.

(i) Alle Wege führen nach Rom.
(ii) Hunde, die bellen, beißen nicht.
(iii) Wenn zwei sich streiten, freut sich der Dritte.

Wie lauten die entsprechenden Negationen?

(d) Formalisieren Sie die folgenden Konstruktionen der Alltagssprache, indem Sie geeignete Aussagen und Aussageformen definieren und diese mit Hilfe der Ihnen zur Verfügung stehenden logischen Verknüpfungen miteinander in Beziehung setzen.

(i) Ist es heiß, so schmilzt das Eis, es sei denn, ich besitze einen Eisschrank.
(ii) Zu jeder ganzen Zahl $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ existieren eindeutige ganze Zahlen $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $q \in \{0, 1\}$ derart, dass k die Summe von q und dem Doppelten von p ist.

Lösung:

(a) Dieser Schluss ist logisch nicht korrekt, denn bezeichen wir mit $A(x)$ die Aussage, dass jemand schockiert ist, und mit $B(x)$ die Aussage, dass jemand versteht, dann ist sie von der Gestalt

$$\Big(\big(\forall x\colon \neg A(x) \Longrightarrow \neg B(x)\big) \wedge \big(\forall x\colon \neg B(x)\big)\Big) \;\Longrightarrow\; \neg A(x)$$

und die entsprechende Wahrheitstabelle liefert, dass es keine Tautologie ist:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A(x) \Longrightarrow \neg B(x)$	$D := (\neg A(x) \Longrightarrow \neg B(x)) \wedge \neg B$	$D \Longrightarrow \neg A$
w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	w	w	f
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

(b) (i) Es gibt kein schwarzes Schaf, das gerne Salat frisst. $\Longleftrightarrow$ Alle schwarzen Schafe fressen nicht gerne Salat.

(ii) Nicht alle Studierende der Analysis sind intelligent und fleißig. $\Longleftrightarrow$ Es gibt einen Studierenden der Analysis, der nicht intelligent oder nicht fleißig ist.

(iii) Weder schläft Tom in der Analysis-Vorlesung, noch guckt er aus dem Fenster.

(c) (i) $\forall\,\text{Weg}\colon\ \text{FuehrtNachRom(Weg)}$ (ii) $\forall\,\text{Hund}\colon \Big(\text{Bellt(Hund)} \Longrightarrow \neg\,\text{Beisst(Hund)}\Big)$

(iii) $\forall x, y, z\colon\ (\text{Streit}(x, y) \wedge x \neq y \neq z \neq x \Longrightarrow \text{FreutSich}(z))$

Die entsprechenden Verneinungen sind wegen $\neg(\forall x\colon ((\neg A) \vee B)) \Longleftrightarrow \exists x\colon (A \wedge (\neg B))$ somit

(i) $\exists\,\text{Weg}\colon \neg\,\text{FuehrtNachRom(Weg)}$ (ii) $\exists\,\text{Hund}\colon \Big(\text{Bellt(Hund)} \wedge \text{Beisst(Hund)}\Big)$

(iii) $\exists x, y, z\colon\ (\text{Streit}(x, y) \wedge x \neq y \neq z \neq x \wedge \neg\,\text{FreutSich}(z))$

(d) (i) $\text{EsIstHeiss} \Longrightarrow \Big[(\text{HabeEisschrank} \wedge \neg\,\text{Eisschmilzt}) \vee \text{Eisschmilzt}\Big]$

(ii) $\forall k \in \big(\{0\} \cup \mathbb{N}\big)\ \exists! p \in \big(\{0\} \cup \mathbb{N}\big)\ \exists! q \in \{0, 1\}\colon k = 2p + q$

Tutoriumsaufgabe T.3: (Aussagen mit Quantoren)

(a) Geben Sie die folgenden Aussagen in Worten an. Entscheiden Sie, ob sie wahr oder falsch sind:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\colon (\forall m \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\colon (\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$

(iii) $\exists n \in \mathbb{N}\colon (\forall m \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$

(iv) $\exists n \in \mathbb{N}\colon (\exists m \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$

(v) $\forall m \in \mathbb{N}\colon (\exists n \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$

(vi) $\exists m \in \mathbb{N}\colon (\exists n \in \mathbb{N}\colon n = 2m)$

Begründen Sie Ihre Entscheidung gegebenenfalls mit einem Beispiel/Gegenbeispiel.

(b) Geben Sie die Verneinungen der folgenden Aussagen an:

(i) $\forall a\colon P(a)$, (ii) $\forall a\colon \neg P(a)$, (iii) $\exists a\colon P(a)$, (iv) $\exists a\colon \neg P(a)$.

(c) Geben Sie die Verneinungen der folgenden Aussagen an:

(i) $\forall a\colon \exists b\colon P(a, b)$, (ii) $\forall a\colon \forall b\colon P(a, b)$, (iii) $\exists a\colon \forall b\colon P(a, b)$, (iv) $\exists a\colon \exists b\colon P(a, b)$.

(d) Welche der folgenden Konklusionen ist richtig?

(i) $(\forall a\colon \exists b\colon P(a, b)) \Longrightarrow (\exists b\colon \forall a\colon P(a, b))$ (ii) $(\exists b\colon \forall a\colon P(a, b)) \Longrightarrow (\forall a\colon \exists b\colon P(a, b))$

(e) Sei $A(x)$ eine Aussageform. Verneinen Sie die Aussage $\exists! x\colon A(x)$ (sprich: „Es existiert genau ein x, so dass $A(x)$ gilt.“), welche definiert ist durch

$$(\exists x\colon A(x)) \wedge \Big(\forall x \forall y\colon \big((A(x) \wedge A(y)) \Longrightarrow x = y\big)\Big)\ .$$

Lösung:

(a) (i) „Für alle natürlichen Zahlen n und m gilt $n = 2m$.“ Dies ist offenbar eine **falsche Aussage**, beispielsweise wenn wir $n = m = 1$ wählen, ist dies nicht erfüllt.

(ii) „Zu jeder natürlichen Zahl n existiert eine natürliche Zahl m mit $n = 2m$." Dies ist ebenso eine **falsche Aussage**, denn beispielsweise existiert zu $n = 5$ keine natürliche Zahl m mit $5 = 2m$.

(iii) „Es existiert eine natürliche Zahl n, so dass für alle natürlichen Zahlen m die Aussage $n = 2m$ gilt." Dies ist ganz offenkundig eine **falsche Aussage**, denn im Falle der Existenz eines derartigen $n \in \mathbb{N}$, würde aus $n = 2 \cdot 3 = 6$ und $n = 2 \cdot 4 = 8$ auch $6 = 8$ folgen. Widerspruch!

(iv) „Es existieren natürliche Zahlen n und m, für die $n = 2m$ gilt." Dies ist eine **wahre Aussage**, denn beispielsweise können wir $n = 88$ und $m = 44$ wählen.

(v) „Zu jeder natürlichen Zahl m existiert eine natürliche Zahl n, für die $n = 2m$ gilt." Dies ist eine **wahre Aussage**, da das Zweifache jeder beliebigen natürlichen Zahl wieder eine natürliche Zahl ist.

(vi) „Es existieren natürliche Zahlen m und n, für die $n = 2m$ gilt." Dies ist eine **wahre Aussage**, denn sie ist beispielsweise äquivalent zu Aussage (iv) oder sie kann als Spezialfall der Aussage (v) interpretiert werden (wenn etwas für alle m gilt, dann auch für ein spezielles).

(b) (i) $\exists a\colon \neg(P(a))$, (ii) $\exists a\colon P(a)$, (iii) $\forall a\colon \neg(P(a))$, (iv) $\forall a\colon P(a)$.

(c) (i) $\exists a\colon \forall b\colon \neg P(a,b)$, (ii) $\exists a\colon \exists b\colon \neg P(a,b)$, (iii) $\forall a\colon \exists b\colon \neg P(a,b)$, (iv) $\forall a\colon \forall b\colon \neg P(a,b)$.

(d) Nur die zweite Konklusion ist richtig, denn wenn es ein b gibt, so dass mit diesem die Aussage $P(a,b)$ zu jedem beliebigen a gilt, finden wir auch zu jedem a ein b, welches in diesem Fall sogar immer dasselbe sein kann, so dass die Aussage $P(a,b)$ richtig ist.
Die erste Konklusion ist im Allgemeinen falsch, denn finden wir zu jedem a ein (i.A. von a abhängiges) b, so dass $P(a,b)$ gilt, muss dieses b nicht für jedes a immer dasselbe gewesen sein.

(e) Mit den de Morganschen Gesetzen und Aufgabenteilen (b,c) sowie der Äquivalenz von $E \Longrightarrow F$ und $\neg E \vee F$ erhalten wir

$$(\forall x\colon \neg A(x)) \vee \Big(\exists x \exists y\colon \big((A(x) \wedge A(y)) \wedge \neg(x = y)\big)\Big)$$

Tutoriumsaufgabe T.4: (Operationen auf Mengen, Relationen)

(a) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für Durchschnitt und Vereinigung zweier nichtleerer beliebiger Mengen A und B in den Fällen

(i) $\big(\neg(A \cap B = \emptyset) \wedge \neg(A \subset B)\big) \wedge \big(\neg(B \subset A)\big)$ (ii) $A \cap B = \emptyset$ (iii) $(A \subset B) \wedge \big(\neg(A = B)\big)$

(b) Bestimmen Sie für die Mengen $A = \{a, z, 4, 1000, \emptyset, lila\}$, $B = \{gruen, lila, 1000, 4, z, Auto\}$ und $C = \{1, 2, 4, a, b, c, d, x, y, z, Fahrrad\}$ die Mengen

(i) $A \setminus B \ := \ \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$

(ii) $A \cap (B \cap C)$ (iii) $A \cup (B \cup C)$ (iv) $C \cup (B \cap A)$ (v) $C \setminus (B \setminus A)$

(c) Das kartesische Produkt einer endlichen Menge $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ mit sich selbst können wir systematisch in der Form

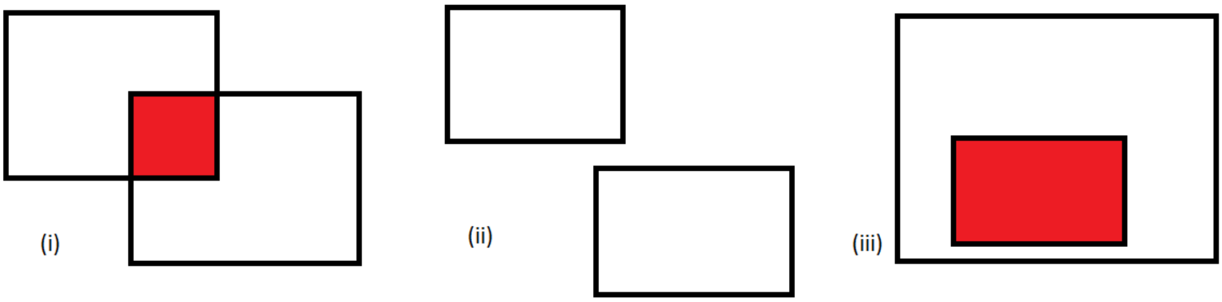
$$M \times M \ = \left\{ \begin{array}{lllll} (m_1, m_1), & (m_1, m_2), & (m_1, m_3), & \ldots & (m_1, m_n), \\ (m_2, m_1), & (m_2, m_2), & (m_2, m_3), & \ldots & (m_2, m_n), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m_n, m_1), & (m_n, m_2), & (m_n, m_3), & \ldots & (m_n, m_n), \end{array} \right\}$$

(i) Welche Eigenschaft hat eine Relation $A \subset M \times M$, die alle Diagonalelemente aus obiger Darstellung enthält ?

(ii) Welche Eigenschaft hat eine Relation $A \subset M \times M$, die mit jedem Element (a,b) auch dasjenige Element enthält, welches im obigen Schema an der Position steht, welche durch Spiegelung der Position von (a,b) an der Diagonalen erhalten wird?

Lösung:

(a)



(b) (i) $A \setminus B = \{a, \emptyset\}$ (ii) $A \cap (B \cap C) = \{4, z\}$

(iii) $A \cup (B \cup C) = \{\emptyset, 1, 2, 4, 1000, a, b, c, d, x, y, z, Auto, Fahrrad, gruen, lila\}$

(iv) $C \cup (B \cap A) = \{1, 2, 4, 1000, a, b, c, d, x, y, z, Fahrrad, lila\}$

(v) $B \setminus A = \{gruen, Auto\} \implies C \cap (B \setminus A) = \emptyset \implies C \setminus (B \setminus A) = C$

(c) (i) Die entsprechende Relation ist reflexiv. (ii) Die entsprechende Relation ist symmetrisch.

Tutoriumsaufgabe T.5: (Abbildungen und ihre Urbilder)

(a) Bestimmen Sie für die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ die folgenden Urbilder:

$$f^{-1}(\mathbb{R}),\quad f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}),\quad f^{-1}(\emptyset),\quad f^{-1}(\{1\}),\quad f^{-1}(\{0\}),\quad f^{-1}([-3, 4]),\quad f^{-1}([1, 4]).$$

Dabei heißt für eine Abbildung $f\colon A \to B$ und eine beliebige Menge $C \subset B$ die Menge $f^{-1}(C) := \{x \in A \mid f(a) \in C\}$ **Urbild von C unter f.**

(b) Beschreiben Sie die geometrischen Operationen (z.B. Spiegelung, Streckung, Verschiebung), durch welche sich die Graphen der nachfolgenden Funktionen aus dem Graphen einer vorgegebenen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ ergeben:

(i) $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -f(x)$

(ii) $g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x + 7)$

(iii) $g_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$, falls f invertierbar ist.

(iv) $g_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f\left(\frac{1}{2}x\right)$

(v) $g_5\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |f|(x)$

Lösung:

(a) (i) $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (ii) $f^{-1}(\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}) = \emptyset$ (iii) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ (iv) $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$

(v) $f^{-1}(\{0\}) = 0$ (vi) $f^{-1}([-3, 4]) = [-2, 2]$ (vii) $f^{-1}([1, 9]) = [-3, -1] \cup [1, 3]$

(b) (i) Der Graph von $g_1\colon x \mapsto -f(x)$ ist die Spiegelung an der x-Achse des Graphen von f.

(ii) Der Graph von $g_2\colon x \mapsto f(x + 7)$ ist der entlang der x-Achse um 7 Einheiten nach links verschobene Graph von f.

(iii) Der Graph von $g_3\colon x \mapsto f^{-1}(x)$ ist die Spiegelung des Graphen von f an der Diagonalen $y = x$.

(iv) Der Graph von $g_4\colon x \mapsto f\left(\frac{1}{2}x\right)$ eine Streckung des Graphen entlang der x-Achse um den Faktor 2.

(v) Der Graph von $g_5\colon x \mapsto |f|(x)$ geht aus dem Graph von f dadurch hervor, dass nur die nichtnegativen Bereiche an der x-Achse gespiegelt werden, während Bereiche, in denen der Graph oberhalb der x-Achse verläuft unverändert bleibt.

Unendliche Mengen und vollständige Induktion:

(a) Um auch „unendiche Mengen" zur Verfügung zu haben, fordern wir die Existenz (mind.) einer **induktiven Menge**, d.h., das nicht-logische Axiom $\exists x : (\emptyset \in x \wedge (\forall y : y \in x \Longrightarrow (y \cup \{y\}) \in x))$.

(b) Die Menge $\mathbb{N}$ der **natürlichen Zahlen** ist der Durchschnitt aller induktiven Mengen, d.h. die kleinste induktive Menge. Anstelle von $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$ bezeichnet man die Elemente von $\mathbb{N}$ üblicherweise mit $1 := \emptyset$, $2 := \{\emptyset\}$, $3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $4 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ....

(c) Durch $s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(y) := y \cup \{y\}$, wird die sogenannte Nachfolgerabbildung auf $\mathbb{N}$ definiert, man schreibt auch kurz $n+1 := s(n)$. Um Aussagen über natürliche Zahlen der Gestalt $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ zu beweisen, genügt es, dass man $A(1)$ und $\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Longrightarrow A(n+1))$ zeigt. Diese Methode wird Beweis durch **vollständige Induktion** genannt.

Gruppen und Primzahlen:

(a) Existiert auf einer Menge $G \neq \emptyset$ eine Operation $\star \colon G \times G \to G$ mit den Eigenschaften

- $\forall k, \ell, m \in G \colon (k \star \ell) \star m = k \star (\ell \star m)$ (**Assoziativität**),
- $\exists n \in G \ \forall k \in G \colon n \star k = k \star n = k$ (**Existenz des neutralen Elements**),
- $\forall k \in G \ \exists \ell \in G \colon k \star \ell = \ell \star k = n$ (**Existenz des Inversen**),

so nennen wir das Paar $(G, \star)$ eine **Gruppe** bzw. **abelsche Gruppe**, falls zusätzlich gilt

- $\forall \ell, m \in G \colon \ell \star m = m \star \ell$ (**Kommutativität**).

(b) Eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt **Primzahl**, falls $n | p \Longrightarrow (n = 1 \vee n = p)$ gilt.

(c) Jedes $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, besitzt eine **eindeutige Primfaktorzerlegung**, d.h., es gibt eindeutige Primzahlen $p_1, \dots, p_m$ und Potenzen $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ mit $n = \prod_{k=1}^{m} p_k^{i_k}$.

Aufgabe 2.1:

(a) Zeigen Sie: Der Durchschnitt aller **induktiven Mengen**, d.h., der Durchschnitt aller Mengen M mit $\emptyset \in M$ und $x \in M \Longrightarrow (x \cup \{x\}) \in M$, ist selbst wieder eine induktive Menge.

(b) Ermitteln Sie die Dualzahl- und die Hexadezimalzahldarstellung der folgenden (bezüglich der Basis 10 dargestellten) natürlichen Zahlen 17, 127, 4096.

Anmerkung: Die Ziffernmenge im Hexadezimalsystem ist $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

(c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Welche natürliche Zahl ergibt sich beginnend bei $k \in \mathbb{N}$ durch n-malige Iteration der Abbildung $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(k) := k^m$?

Lösung:

(a) Mit anderen Worten ist zu zeigen, dass die Menge $\mathbb{N} := \bigcap_{M \text{ induktiv}} M$ selbst induktiv ist.

(i) Nun gilt einerseits $\emptyset \in \mathbb{N}$, da für jede induktive Menge M auch $\emptyset \in M$ gilt, also $\emptyset$ auch im Schnitt liegen muss.

(ii) Andererseits folgt aus $x \in \mathbb{N}$ auch $x \in M$ für alle induktiven M, also nach Definition der Induktivität auch $x \cup \{x\} \in M$ für alle induktiven M, und daher $x \cup \{x\} \in \mathbb{N}$.

Demnach ist auch $\mathbb{N}$ induktiv.

(b) Es gelten

$$\begin{array}{rcl} 17_{10} &=& 10001_2 &=& 11_{16} \\ 127_{10} &=& 1111111_2 &=& 7F_{16} \\ 4096_{10} &=& 1000000000000_2 &=& 1000_{16} \end{array}$$

(c) Es gilt $f(f(k)) = (k^m)^m = k^{(m^2)}$, $f(f(f(k))) = (k^{(m^2)})^m = k^{(m^3)}$, ..., also ergibt sich nach n-maliger Iteration $k^{(m^n)}$. Beweisen können wir dies mittels Methode der vollständigen Induktion:

(i) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $f(k) = k^m = k^{(m^1)}$ eine wahre Aussage.

(ii) Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: Für eine natürliche Zahl m gelte $f^n(k) = k^{(m^n)}$.
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $f^{n+1}(k) = k^{(m^{n+1})}$.
- Beweis: Es ist $f^{n+1}(k) = f(f^n(k)) \overset{\text{IV}}{=} f\left(k^{(m^n)}\right) = \left(k^{(m^n)}\right)^m = k^{m^n \cdot m} = k^{(m^{n+1})}$.

Aufgabe 2.2:

(a) Berechnen Sie die Ausdrücke (i) $\sum\limits_{k=3}^{10} k^2$ (ii) $\sum\limits_{k=-3}^{3} (k+2) \cdot k$ (iii) $\sum\limits_{k=1}^{4} \left(\prod\limits_{l=1}^{k} 2 \right)$

(b) Zeigen Sie: Teilt die natürliche Zahl k die natürlichen Zahlen m und n, dann teilt k auch $n - m$.

(c) Zeigen Sie: Gäbe es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, dann gäbe es unter diesen eine Primzahl, die sowohl

$$\prod_{k=1}^{n} p_k \qquad \text{als auch} \qquad \left(\prod_{k=1}^{n} p_k \right) + 1$$

teilt. Folgern Sie mittels (b), dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

(d) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 54 , 221 , 2010 und 4807 .

Lösung:

(a) (i) $\sum\limits_{k=3}^{10} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = 380$

(ii) $\sum\limits_{k=-3}^{3} (k+2) \cdot k = (-1)\cdot(-3)+0\cdot(-2)+1\cdot(-1)+2\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 3 = 3-1+3+8+15 = 28$

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{4} \left(\prod\limits_{l=1}^{k} 2 \right) = 2 + (2\cdot 2) + (2\cdot 2\cdot 2) + (2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) = 2+4+8+16 = 30$

(b) Gilt $k \cdot i = m$ und $k \cdot j = n$ mit natürlichen Zahlen i, j, dann gilt $k \cdot (j - i) = k \cdot j - k \cdot i = n - m$, also teilt k auch $n - m$.

(c) (i) Die Zahl $\prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ wird von jeder der Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ geteilt.

(ii) Die Zahl $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} p_k \right) + 1$ ist größer als Eins, wird also nach der Annahme, dass es nur die Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ gibt, auch zumindest von einer Primzahl p_i geteilt.

Somit teilt p_i beide Zahlen und damit nach (b) auch ihre Differenz, die jedoch gleich Eins ist. Dies ist ein Widerspruch zu $p_i > 1$. Daher war die Annahme falsch, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt.

(d) Die entsprechenden Primfaktorzerlegungen sind

$$\begin{array}{rcl} 54 &=& 2\cdot 3^3\,, \\ 221 &=& 13\cdot 17\,, \end{array} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{array}{rcl} 2010 &=& 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67\,, \\ 4807 &=& 11\cdot 19\cdot 23\,. \end{array}$$

Körper und Äquivalenzrelationen:

(a) Zu gegebenem $m, n \in \mathbb{N}$ kann man die Gleichung $k + m = n$ für k in $\mathbb{N}$ genau dann lösen, wenn $m < n$ gilt. Damit es stets eine Lösung gibt, wird $\mathbb{N}$ zur Menge $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ der **ganzen Zahlen** erweitert und die Addition und Multiplikation darauf fortgesetzt.

(b) In $\mathbb{Z}$ ist 0 das neutrale Element der Addition, d.h. $n + 0 = n$ gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$, und jedes Element hat ein Inverses bzgl. der Addition, d.h. zu $n \in \mathbb{Z}$ existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m + n = 0$.

(c) Da die Gleichung $k \cdot m = n$ in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu vorgegebenem $m, n \in \mathbb{Z}$ im Allgemeinen keine Lösung besitzt, wird $\mathbb{Z}$ zur Menge der **rationalen Zahlen**

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p \text{ und } q \text{ teilerfremd} \right\} \cup \{0\}$$

erweitert und Addition sowie Multiplikation darauf fortgesetzt.[1]

(d) Sind auf einer Menge K zwei Operationen $\star\colon K \times K \to K$ und $\circledast\colon K \times K \to K$ gegeben, so dass $(K, \star)$ mit neutralem Element 0 und $(K \setminus \{0\}, \circledast)$ mit neutralem Element $1 \neq 0$ jeweils abelsche Gruppen bilden und gilt für diese Operationen

- $\forall k, \ell, m \in K\colon (k \star \ell) \circledast m = (k \circledast m) \star (\ell \circledast m)$ (**Distributivität**),

dann nennen wir das Tripel $(K, \star, \circledast)$ einen **Körper**.

(e) Ist $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ vorgegeben, so definiert $m \sim n :\Longleftrightarrow k|(m - n)$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, d.h. eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf $\mathbb{Z}$.

Auf der Menge $\mathbb{Z}_k$ der zugehörigen **Äquivalenzklassen** $[n] := \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m \sim n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, kann man durch $[m] + [n] := [m + n]$ und $[m] \cdot [n] := [m \cdot n]$ Addition und Multiplikation mit neutralen Elementen $[0]$ und $[1]$ definieren, so dass die $(\mathbb{Z}_k, +)$ und – falls $k = p$ eine Primzahl – ebenso die $(\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}, \cdot)$ abelsche Gruppen bilden. Insbesondere sind die $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ sogar Körper.

Aufgabe 3.1:

(a) Berechnen Sie, sofern existent, in $\mathbb{Q}$ die Ausdrücke

(i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ (ii) $\frac{1}{6} - \frac{5}{4}$ (iii) $\frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{2}{11}}$ (iv) $\frac{1}{\frac{11}{12} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4}}$

(b) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ durch $m \sim n\colon \Longleftrightarrow k|(m - n)$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ definiert wird.

(c) Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_k$ wohldefiniert sind.

Lösung:

(a) Es gelten

(i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$ (ii) $\frac{1}{6} - \frac{5}{4} = \frac{2}{12} - \frac{15}{12} = -\frac{13}{12}$ (iii) $\frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{2}{11}} = \frac{1}{\frac{1}{55}} = 55$

Da $\frac{11}{12} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4} = 0$ gilt, existiert (iv) kein Inverses, $\frac{1}{\frac{11}{12} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4}}$ ist also nicht definiert.

(b) Es ist Reflexivität, Symmetrie und Transitivität zu überprüfen:

[1] Genau genommen bezeichnet $\mathbb{Q}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} :\Longleftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$.

- $m \sim m$ gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$, denn wegen $k \cdot 0 = 0$ teilt jede Zahl die Null.
- $m \sim n \Longrightarrow n \sim m$ gilt für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, denn gilt $k|(m-n)$, dann auch $k|(n-m)$.
- $((m \sim n) \wedge (n \sim r)) \Longrightarrow m \sim r$ gilt für alle $m, n, r \in \mathbb{Z}$, denn gilt $k|(m-n)$ und $k|(n-r)$, dann gilt auch $k|((m-n)+(n-r))$ und somit $k|(m-r)$.

(c) Ist $m \sim m'$ und $n \sim n'$, dann gilt auch $m+n \sim m'+n'$, denn gilt $k|(m-m')$ und $k|(n-n')$, dann gilt auch $k|((m-m')+(n-n'))$, also $k|((m+n)-(m'+n'))$. Daher ist die Addition wohldefiniert.

Entsprechend gilt bei $m \sim m'$ und $n \sim n'$ auch $m \cdot n \sim m' \cdot n'$, denn gilt $k|(m-m')$ und $k|(n-n')$, dann gilt $k|((m-m') \cdot n)$ und $k|(m' \cdot (n-n'))$, also auch $k|((m \cdot n - m' \cdot n) + (m' \cdot n - m' \cdot n'))$, d.h. $k|(m \cdot n - m' \cdot n')$.

Aufgabe 3.2:

(a) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_7$ die Ausdrücke

$$[3]_7 + [5]_7 \quad , \quad [2]_7 - [6]_7 \quad , \quad [1]_7 - [13]_7 \quad , \quad [3]_7 \cdot [4]_7 \quad , \quad ([5]_7)^{-1} \quad , \quad ([6]_7)^{-1} \quad .$$

(b) Beweisen Sie durch Rechnen in $\mathbb{Z}_2$: Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl ist ungerade.

(c) Zeigen Sie für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ und festes $m \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, dass das Produkt $[m]_p \cdot [n]_p$ bei $n = 0, 1, \ldots, p-1$ alle Äquivalenzklassen in $\mathbb{Z}_p$ durchläuft.[2]

(d) Zeigen Sie: Ein Körper ist **nullteilerfrei**: Aus $xy = 0$ folgt zwingend, dass $x = 0$ oder $y = 0$ ist.

Lösung:

(a) Es gelten

$$\begin{array}{rcl} [3]_7 + [5]_7 & = & [1]_7 \ , \\ [2]_7 - [6]_7 & = & [3]_7 \ , \\ [1]_7 - [13]_7 & = & [2]_7 \ , \\ [3]_7 \cdot [4]_7 & = & [5]_7 \end{array} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{array}{rcll} ([5]_7)^{-1} & = & [3]_7 & \text{denn } [3]_7 \cdot [5]_7 = [1]_7, \\ ([6]_7)^{-1} & = & [6]_7 & \text{denn } [6]_7 \cdot [6]_7 = [1]_7. \end{array}$$

(b) Eine Zahl n ist genau dann ungerade, wenn $[n]_2 = [1]_2$ gilt. Nun ist aber $[n^2]_2 = [n]_2 \cdot [n]_2 = [1]_2 \cdot [1]_2 = [1]_2$, d.h. auch n^2 ist ungerade (direkte Beweise für diese Aussage sind natürlich auch möglich).

(c) Da $\mathbb{Z}_p$ ein Körper ist, folgt aus $[m]_p \cdot [n]_p = [m]_p \cdot [n']_p$ nach Multiplikation mit $[m]_p^{-1}$ schon $[n]_p = [n']_p$, und bei $n, n' \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ also $n = n'$.
Daher kommt unter den Äquivalenzklassen $[m]_p \cdot [n]_p$ beim Durchlaufen von $n = 0, 1, \ldots, p-1$ keine doppelt vor, da es aber nur p Äquivalenzklassen gibt, wird somit jede durchlaufen.

(d) Sei $xy = 0$ und angenommen $x \neq 0$. Dann hat x ein Inverses x^{-1}, und mit diesem gilt

$$y \overset{1 \text{ neutral}}{=} 1 \cdot y \overset{x^{-1}x=1}{=} (x^{-1}x)y \overset{\textit{assoziativ}}{=} x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 \overset{\textit{kommutativ}}{=} 0 \cdot x^{-1} = 0.$$

Also folgt aus $xy = 0$ und $x \neq 0$ automatisch $y = 0$, wodurch die Aussage bewiesen ist.

[2] Dabei ist $p\mathbb{Z} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \colon p \cdot m = k\} = \{0, p, -p, 2p, -2p, 3p, -3p, \ldots\}$.

Ordnungsrelationen und angeordnete Körper:

(a) Eine Relation $\preceq$ auf $M \neq \emptyset$ heißt **Ordnungsrelation**, falls gilt

- $\forall x \in M\colon x \preceq x$ (**Reflexivität**)
- $\forall x, y, z \in M\colon x \preceq y \wedge y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$ (**Transitivität**)
- $\forall x, y \in M\colon x \preceq y \wedge y \preceq x \Longrightarrow x = y$ (**Antisymmetrie**)

Eine Ordnungsrelation $\preceq$ auf $M \neq \emptyset$ heißt **total**, falls für beliebige $x, y \in M$ stets $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt, also je zwei Elemente vergleichbar sind.

(b) Ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt **angeordnet**, wenn auf $\mathbb{K}$ eine totale Ordnungsrelation $\preceq$ gegeben ist, die sich mit den Körperoperationen $+$ und $\cdot$ in folgendem Sinn verträgt:

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon x \preceq y \Longrightarrow x + z \preceq y + z$,
(ii) $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon 0 \preceq x \wedge 0 \preceq y \Longrightarrow 0 \preceq x \cdot y$.

Direkt aus der Definition ergeben sich die weiteren Eigenschaften

- $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon x \preceq y \wedge z \preceq 0 \Longrightarrow y \cdot z \preceq x \cdot z$
- $\forall x \in \mathbb{K}\colon 0 \preceq x^2$
- $\forall x \in \mathbb{K}\colon 0 \preceq x \wedge 0 \neq x \Longrightarrow 0 \preceq x^{-1}$
- $\forall x, y \in \mathbb{K}\colon x \preceq y \wedge 0 \preceq x \wedge 0 \neq x \Longrightarrow \frac{1}{y} \preceq \frac{1}{x}$

(c) Auf dem angeordneten Körper $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen** ist die **Betragsfunktion** definiert durch

$$|.|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$$

(d) Es gilt $\nexists x \in \mathbb{Q}\colon x^2 = 2$. Es gibt unendlich viele (angeordnete) Zwischenkörper $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{K} \subsetneq \mathbb{R}$.

Quadratische Polynome und Polynomdivision:

(a) Ob ein (normiertes, d.h. mit höchstem Koeffizienten gleich 1) quadratisches Polynom $x^2 + px + q$ Nullstellen besitzt, kann man mittels **quadratischer Ergänzung** ermittelt werden:

$$x^2 + px + q \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overbrace{x^2 + 2 \cdot \tfrac{p}{2}x + \tfrac{p^2}{4}}^{=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} \;=\; \overbrace{\tfrac{p^2}{4} - q}^{=:D(\text{iskriminante})}$$

Im Fall $D \geq 0$ erhalten wir die bekannte p-q-Formel $\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$

(b) Analog zur schriftlichen Division funktioniert die Polynomdivision (gegebenenfalls mit Rest).

Aufgabe 4.1:

(a) Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass $\subseteq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$ ist.
Ist $\subseteq$ im Allgemeinen auf $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnungsrelation?

(b) Zeigen Sie, dass Lösungen von $x^2 = 3$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegen können.

(c) Geben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung (möglichst weniger) paarweise disjunkter[3] offener, halboffener bzw. abgeschlossener Intervalle reeller Zahlen an.

(i) $A = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 2\right[$ (ii) $B = [3, 7] \cup [5, 6[\cup \left]\frac{11}{2}, 8\right[$ (iii) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N} \;:\; 0 < x - n < \frac{1}{3}\right\}$

[3]Dabei heißt eine Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ von Mengen A_i **paarweise disjunkt**, wenn $\forall i, j \in I\colon (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$.

Lösung:

(a) Es ist zu zeigen, dass $\subseteq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

(i) Da jede Menge A Teilmenge von sich selbst ist, haben wir Reflexivität.
Genauer: $A \subseteq A \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall a : (a \in A \Longrightarrow a \in A)$, wobei die letzte Implikation trivial ist.

(ii) Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so gelten nach Definition $\forall x : (x \in A \Longrightarrow x \in B)$ und $\forall x : (x \in B \Longrightarrow x \in A)$. Das ist aber zusammengefasst $\forall x : (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$. Dies wiederum heißt nichts anderes als, dass die Mengen A und B gleich sind. Damit folgt die Antisymmetrie.

(iii) Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so ist auch $A \subseteq C$, so dass auch Transitivität vorliegt.
Genauer: Es gilt dann $\forall x : (x \in A \Longrightarrow x \in B)$ und $\forall x : (x \in B \Longrightarrow x \in C)$, was zusammengefasst $\forall x : (x \in A \Longrightarrow x \in B \Longrightarrow x \in C)$ ergibt. Daraus folgt aber direkt, dass $\forall x : (x \in A \Longrightarrow x \in C)$ gilt, was nach Definition mit $A \subseteq C$ übereinstimmt.

Für mindestens zweielementige Mengen M ist $\subseteq$ keine totale Ordnung, denn für $M \ni a \neq b \in M$ gilt einerseits $\{a\} \in \mathcal{P}(M)$ und $\{b\} \in \mathcal{P}(M)$, aber andererseits weder $\{a\} \subseteq \{b\}$ noch $\{b\} \subseteq \{a\}$.

(b) Angenommen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd sei eine Lösung von $x^2 = 3$. Dann folgt $m^2 = 3n^2$. Also ist 3 ein Teiler von m^2. Da $m \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$m = \prod_{k=1}^{n} p_k^{j_k} \qquad (p_k \text{ prim }, j_k \in \mathbb{N})$$

besitzt und nach Potenzgesetzen

$$m^2 \;=\; \prod_{k=1}^{n} p_k^{2j_k}$$

gilt, ist jeder Primteiler von m^2 auch Primteiler von m. Somit gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $m = 3r$, und folglich muss auch $9r^2 = 3q^2$, also $3r^2 = q^3$ gelten. Mit derselben Argumentation muss dann auch 3 ein Teiler von q sein, womit p und q entgegen der Annahme nicht teilerfremd sind, Widerspruch.

(c) Die gesuchten Intervalle bzw. Vereinigungen von Intervallen sind:

$$\text{(i)}\;\; A \;=\; [1,2[\qquad \text{(ii)}\;\; B \;=\; [3,8[\qquad \text{(iii)}\;\; C \;=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]n, n + \frac{1}{3}\right[$$

Aufgabe 4.2: **(Beweise mittels vollständiger Induktion)**

(a) Was ist an folgendem „Induktionsbeweis“ für die Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 4n = 0$ falsch?

Induktionsanfang: $4 \cdot 0 = 0$.
Induktionsschluss: Gilt $4k = 0$ für alle $k < n$, so gilt auch $4n = 0$. Denn es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n = k_1 + k_2$ und $k_1, k_2 < n$, also gilt $4n = 4k_1 + 4k_2 = 0$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \;=\; \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(c) Beweisen Sie die Aussage $\quad \forall n \in \mathbb{N}\colon \left(n \geq 2 \;\Longrightarrow\; \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \;=\; \frac{n+1}{2n} \right)$

(d) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

(i) $n^3 + 2n$ durch 3 teilbar (ii) $3^n - 3$ durch 6 teilbar (iii) $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar.

(e) Ab welcher Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $n! \geq 2^n$? Führen Sie einen Induktionsbeweis.

Lösung:

(a) Für $n = 1$ gibt es keine zwei $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1, k_2 < 1$ und $1 = k_1 + k_2$, denn $k_1, k_2 < 1$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ impliziert $k_1 = 0 = k_2$.

(b) (i) Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{6} \cdot 6$.

Induktionsschritt: Gelte $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Dann gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) \end{aligned}$$

und somit ist der Induktionsschritt von n auf $n+1$ vollzogen.

(ii) Induktionsanfang: Es ist $\sum\limits_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \dfrac{4}{4} = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$.

Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n+2)^2(n+1)^2}{4}$.
- Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n^2+4(n+1))(n+1)^2}{4} = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} . \end{aligned}$$

(c)

- Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{2}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{n+1}{2n}$$

- Induktionsschritt: Es gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \overset{\text{IV}}{=} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{(n+1)2n} = \frac{(n+1)(n+1)-1}{(n+1)2n} = \frac{n^2+2n}{(n+1)2n} = \frac{n+2}{2(n+1)} . \end{aligned}$$

(d) (i) Induktionsanfang: Es ist $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ durch 3 teilbar.
Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: Es sei $n^3 + 2n$ durch 3 teilbar, d.h., $\exists m \in \mathbb{N}\colon 3 \cdot m = n^3 + 2n$.
- Induktionsbehauptung: Dann ist auch $(n+1)^3 + 2(n+1)$ durch 3 teilbar, d.h., es gilt

$$\exists \tilde{m} \in \mathbb{N}\colon 3 \cdot \tilde{m} = (n+1)^3 + 2(n+1) .$$

- Beweis: Da für $\tilde{m} := m + n^2 + n + 1$ offenbar $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung wegen

$$(3+1)^n+2(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+2n+2 = n^3+2n+3(n^2+n+1) = 3(m+n^2+n+1) = 3 \cdot \tilde{m} .$$

(ii) Induktionsanfang: Es ist $3^1 - 3 = 0$ durch 6 teilbar.
Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: Es sei $3^n - 3$ durch 6 teilbar, d.h., $\exists m \in \mathbb{N}\colon 6 \cdot m = 3^n - 3$.
- Induktionsbehauptung: Dann ist auch $3^{n+1} - 3$ durch 6 teilbar, d.h., es gilt

$$\exists \tilde{m} \in \mathbb{N}\colon 6 \cdot \tilde{m} = 3^{n+1} - 3 .$$

- Beweis: Da für $\tilde{m} := 3m+1$ offenbar $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung wegen

$$3^{n+1} - 3 = \; 3(3^{n+1} - 3) + 6 = \; 3 \cdot 6m + 6 = \; 6(3m+1) = \; 6 \cdot \tilde{m} \; .$$

(iii) Induktionsanfang: Es ist $7^{2\cdot 1} - 2^1 = 49 - 2 = 47$ durch 47 teilbar.
Induktionsschritt:

- Induktionsvor.: Es sei $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar, d.h., $\exists m \in \mathbb{N}\colon 47 \cdot m = 7^{2n} - 2^n$.
- Induktionsbehauptung: Dann ist auch $7^{2n+2} - 2^{n+1}$ durch 47 teilbar, d.h., es gilt

$$\exists \tilde{m} \in \mathbb{N}\colon 47 \cdot \tilde{m} = 7^{2n+2} - 2^{n+1} \; .$$

- Beweis: Da für $\tilde{m} := 49m + 2^n$ offenbar $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung wegen

$$7^{2n+2} - 2^{n+1} = \; 7^2(7^{2n} - 2^n) + (7^2 - 2)2^n = \; 49 \cdot 47m + 47 \cdot 2^n = \; 47(49m + 2^n) = \; 47 \cdot \tilde{m} \; .$$

(e) Für $n = 0$ gilt $0! = 1 \geq 1 = 2^0$. Aber für $n = 1$ gilt $1! = 1 < 2 = 2^1$, und ebenso $2! = 2 < 4 = 2^2$ für $n = 2$ bzw. $3! = 6 < 8 = 2^3$ für $n = 3$. Tatsächlich gilt die Formel erst ab $n = 4$ allgemein, wie der folgende Induktionsbeweis zeigt.
Induktionsanfang: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \geq 16 = 2^4$.
Induktionsschluss: Gelte die Induktionsvoraussetzung $n! \geq 2^n$. Zu zeigen ist die Induktionsbehauptung $(n+1)! \geq 2^{n+1}$.
Beweis der Induktionsbehauptung: Es gilt

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{IV}{\geq} (n+1)2^n \overset{n\geq 1}{\geq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

für $n \geq 1$, was wegen $n \geq 4$ der Fall ist.
Beachte: Beim Induktionsschluss haben wir $n \geq 1$ benötigt. Daher muss der Induktionsanfang mindestens bei $n = 1$ liegen. Wie wir aber gesehen haben, ist die Ungleichung für $n = 1, 2, 3$ falsch. Deswegen konnte die Induktion erst bei $n = 4$ verankert werden, die Ungleichung $n! \geq 2^n$ gilt somit nur für alle $n \geq 4$.

Aufgabe 4.3: (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $\dfrac{|x-2|(x+2)}{x} < |x|$ erfüllen.

(b) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle ?

(i) $A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x-1}{2x+1} < \dfrac{1}{3} \right\}$ (ii) $B := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{3-x}{x+1} \right\}$

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit (i) $x < x^2$, (ii) $\dfrac{10}{x} - 3 < \dfrac{4}{x} + 1$, (iii) $3x^2 + 6x - 8 > 1$.

(d) Lösen Sie über dem Körper der reellen Zahlen die folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie die Lage der jeweiligen Lösungsmenge auf der x-Achse:

(i) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}x \leq x - \dfrac{7}{6}$ (ii) $\dfrac{5}{2}(x-3) \leq (x-3)$ (iii) $|x^2 - 4| - |x+2|(x^2 + x - 6) > 0$

(e) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(i) $|x+3| + |x-3| > 8$ (ii) $x(2-x) > 1 + |x|$ (iii) $\left| \dfrac{x}{x+1} \right| > \dfrac{x}{x+1}$

Lösung:

(a) Die Ungleichung $\dfrac{|x-2|(x+2)}{x} < |x|$ ist nur für $x \neq 0$ erklärt. Wir unterscheiden die Fälle:

- $x \in D_1 := \;]-\infty, 0[$: $\dfrac{-(x-2)(x+2)}{x} < -x \Longrightarrow x^2 - 4 < x^2 \Longrightarrow -4 < 0 \Longrightarrow L_1 = D_1$.

- $x \in D_2 := \;]0,2]$: $\dfrac{-(x-2)(x+2)}{x} < x \Longrightarrow -(x^2-4) < x^2 \Longrightarrow 2 < x^2 \Longrightarrow L_2 =]\sqrt{2}, 2]$.
- $x \in D_3 := \;]2,\infty[$: $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x} < x \Longrightarrow x^2-4 < x^2 \Longrightarrow -4 < 0 \Longrightarrow L_3 = D_3$.

Somit haben wir als Lösungsmenge $L \;=\; \bigcup_{k=1}^{3} L_k \;=\;]-\infty, 0[\; \cup \;]\sqrt{2}, \infty[$.

(b) (i) Da die Ungleichung $\dfrac{x-1}{2x+1} < \dfrac{1}{3}$ nur für $x \neq -\dfrac{1}{2}$ erklärt ist, unterscheiden wir die beiden Fälle:

- Für $x < -\dfrac{1}{2}$ und somit $2x+1 < 0$ hat die Ungleichung aufgrund der Äquivalenz zu $3(x-1) > 2x+1$ und somit zu $x > 4$ keine Lösung, d.h., $L_1 = \emptyset$.
- Für $x > -\dfrac{1}{2}$ und somit $2x+1 > 0$ ist die Ungleichung äquivalent zu $3(x-1) < 2x+1$ und somit zu $x < 4$. Also haben wir als eine Lösungsmenge $L_2 = \left]-\frac{1}{2}, 4\right[$.

Also folgt $A = L_2$, weswegen die Teilmenge A ein Intervall ist.

(ii) Da die Ungleichung $x < \dfrac{3-x}{x+1}$ nur für $x \neq -1$ erklärt ist, unterscheiden wir die beiden Fälle:

- Für $x > -1$ und somit $x+1 > 0$ ist die Ungleichung äquivalent zu $x(x+1) < 3-x$ und somit zu $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3) < 0$. Also haben wir als eine Lösungsmenge $L_1 =]-1, \infty[\; \cap \;]-3, 1[\; = \;]-1, 1[$.
- Für $x < -1$ und somit $x+1 < 0$ hat die Ungleichung aufgrund der Äquivalenz zu $x(x+1) > 3-x$ und somit zu $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3) > 0$ die Lösung $L_2 =]-\infty, -3[$.

Also folgt $B = L_1 \cup L_2$, weswegen die Teilmenge B kein Intervall ist.

(c) (i) Es ist 0 wegen $0 = 0^2$ nicht in der Lösungsmenge. Darum unterscheiden wir die folgenden beiden Fälle:

- Sei $x > 0$, dann ist $x < x^2$ äquivalent zu $1 < x$, also $L_1 =]1, \infty[$.
- Sei $x < 0$, dann gilt aufgrund der Nichtnegativität von Quadraten reeller Zahlen sowie der Nullteilerfreiheit von Körpern auch $0 < x^2$, so dass $x < 0 < x^2$ stets wahr ist, also ist $L_2 =]-\infty, 0[$.

Somit besteht die Lösungsmenge aus der Vereinigung der beiden Intervalle L_1 und L_2.

(ii) Beide Seiten sind nur für $x \neq 0$ definiert, also $0 \notin L$. Nach den Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen ist die Ungleichung äquivalent zu $\dfrac{6}{x} < 4$.

- Für $x > 0$ folgt $\dfrac{6}{4} < x$, also $L_1 = \left]\dfrac{3}{2}, \infty\right[$.
- Für $x < 0$ ist $\dfrac{1}{x} < 0$, also $\dfrac{6}{x} < 0 < 4$ stets wahr, womit sich $L_2 =]-\infty, 0[$ ergibt.

Somit besteht die Lösungsmenge aus der Vereinigung der beiden Intervalle L_1 und L_2.

(iii) Die Ungleichung ist äquivalent zu $3(x+3)(x-1) = 3(x^2+2x-3) = 3x^2+6x-9 > 0$, was einer nach oben geöffneten Parabel entspricht, welche die Nullstellen -3 und 1 besitzt sowie ihr Minimum bei -1 mit Wert -12 annimmt. Somit ergibt sich als Lösungsmenge

$$L \;=\;]-\infty, -3[\; \cup \;]1, \infty[\;.$$

(d) (i) Die Ungleichung ist äquivalent zu $\dfrac{3}{2} = \dfrac{2+7}{6} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{6} \leq x - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{1}{2}x$, also $3 \leq x$.

(ii) Offenbar gilt die Ungleichung für $x = 3$. Da wegen $\dfrac{5}{2} > 1$

- für $x > 3$ auch $x - 3 > 0$ und damit $\dfrac{5}{2}(x-3) > (x-3)$ gilt sowie

- für $x < 3$ auch $-(x-3) > 0$ und damit $-(x-3)\frac{5}{2} > -(x-3)$, also $(x-3) > \frac{5}{2}(x-3)$ folgt,

erhalten wir als Lösungsmenge $L \;=\;]-\infty, 3]$.

(iii) Wir halten zunächst fest, dass für obige Betragsungleichung die Äquivalenz

$$|x^2-4| - |x+2|(x^2+x-6) > 0 \iff |x+2|\Big(|x-2| - (x-2)(x+3)\Big) > 0$$

gilt, weswegen $-2 \notin L$ folgt. Aufgrund der Definitheit des Betrages ist nur zu untersuchen, wann der zweite Faktor positiv ist:

- Für $x > 2$ ist $|x-2|-(x-2)(x+3) = (x-2)(1-(x+3)) = -(x-2)(x+2)$ eine nach unten geöffnete Parabel, welche jedoch für $x > 2$ negative Funktionswerte annimmt.
- Für $x < 2$ ist $|x-2|-(x-2)(x+3) = (x-2)(-1-(x+3)) = -(x-2)(x+4)$ ebenfalls eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen -4 und 2.

Die Lösungsmenge ist somit insgesamt $L \;=\;]-4, 2[\setminus\{-2\}$, da der erste Faktor nur bei -2 verschwindet.

(e) (i)
- Im Fall $x < -3$ ist die Ungleichung $|x+3|+|x-3| > 8$ äquivalent zu $-(x+3)-(x-3) = -2x > 8$, also $-4 > x$, daher ist $L_1 =]-\infty,-3[\,\cap\,]-\infty,-4[\;=\;]-\infty,-4[$.
- Im Fall $x \geq 3$ ist die Ungleichung $|x+3|+|x-3| > 8$ äquivalent zu $(x+3)+(x-3) = 2x > 8$, also $x > 4$, daher ist $L_2 = [3,\infty[\,\cap\,]4,\infty[\;=\;]4,\infty[$.
- Im verbleibenden Fall $-3 \leq x < 3$ ist die Ungleichung $|x+3|+|x-3| > 8$ äquivalent zu $(x+3)-(x-3) = 6 > 8$, was jedoch eine falsche Aussage ist. Daher ist hier $L_3 = \emptyset$.

Insgesamt erhalten wir nun als Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \;]-\infty,-4[\,\cup\,]4,\infty[$.

(ii) Es ist $L = \emptyset$, da $\forall x \in \mathbb{R}\colon x(2-x) \leq 1(2-1) = 1 \leq 1+|x|$.

(iii) Wegen $|y| > y \iff y < 0$ haben wir die Ungleichung $\frac{x}{x+1} < 0$ zu untersuchen, wobei $-1, 0 \notin L$.
- Im Fall $x < -1$ ist $x+1 < 0$ und $x < 0$, also $\frac{x}{x+1} > 0$. Also erhalten wir $L_1 = \emptyset$.
- Im Fall $x > 0$ ist $x+1 > 1 > 0$ und somit ebenfalls $\frac{x}{x+1} > 0$, also erhalten wir $L_2 = \emptyset$.
- Im verbleibenden Fall $-1 < x < 0$ ist $0 < x+1$, also auch $0 < \frac{1}{x+1}$ und nach Folgerung (h) schließlich $\frac{x}{x+1} < 0$. Also ist $L = L_3 = \;]-1, 0[$ die gesuchte Lösungsmenge.

Aufgabe 4.4: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) $|7-|x-5|| \leq 3$ (b) $|x^2-4x+3| \leq |x^2-4|$ (c) $|x+1|-|x|+|x-1| < 2$

(d) $|x^2+x-2| < x$ (e) $\dfrac{x+1}{x} \leq |x|$ (f) $|x+2|-|x-2| \geq 2$ (g) $||x+1|-2| \leq 1$

Lösung:

(a) Wegen $|7-y| \leq 3 \iff -3 \leq y-7 \leq 3 \iff 4 \leq y \leq 10$ erhalten wir für

- $x \geq 5$: $4 \leq x-5 \leq 10 \Longrightarrow 9 \leq x \leq 15 \Longrightarrow L_1 = [9, 15]$.
- $x < 5$: $4 \leq 5-x \leq 10 \Longrightarrow -5 \leq x \leq 1 \Longrightarrow L_2 = [-5, 1]$.

Somit ist die Lösungsmenge $L \;=\; [-5, 1] \cup [9, 15]$.

(b) Die Ungleichung lässt sich auch schreiben als $|x-1|\cdot|x-3| \leq |x-2|\cdot|x+2|$. Somit unterscheiden wir die fünf Fälle

- $x < -2$: $x^2-4x+3 \leq x^2-4 \iff 7 \leq 4x \iff \dfrac{7}{4} \leq x \Longrightarrow L_1 = \emptyset$.
- $-2 \leq x < 1$: $x^2-4x+3 \leq -(x^2-4) \iff (x-1)^2 \leq \dfrac{3}{2} \Longrightarrow L_2 = \left[1-\sqrt{\dfrac{3}{2}}, 1\right[$.

- $1 \leq x < 2$: $-(x^2-4x+3) \leq -(x^2-4) \iff 4x \leq 7 \iff x \leq \frac{7}{4} \implies L_3 = \left[1, \frac{7}{4}\right]$.
- $2 \leq x < 3$: $-(x^2-4x+3) \leq x^2-4 \iff \frac{3}{2} \leq (x-1)^2 \implies L_4 = \left[1+\sqrt{\frac{3}{2}}, 3\right[$.
- $3 \leq x$: $x^2-4x+3 \leq x^2-4 \iff 7 \leq 4x \iff \frac{7}{4} \leq x \implies L_1 = [3, \infty[$.

Also ist $L = \left[1-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{7}{4}\right] \cup \left[1+\sqrt{\frac{3}{2}}, 3\right[$

(c) Wir unterscheiden in

- $x < -1$: $-(x+1)+x-(x-1) < 2 \iff -2 < x \implies L_1 =]-2,-1[$;
- $-1 \leq x < 0$: $(x+1)+x-(x-1) < 2 \iff x < 0 \implies L_2 = [-1,0[$;
- $0 \leq x < 1$: $(x+1)-x-(x-1) < 2 \iff x < 0 \implies L_3 =]0,1[$;
- $1 \leq x$: $(x+1)-x+(x-1) < 2 \iff x < 2 \implies L_4 = [1,2[$;

Die Lösungsmenge ist daher $L = \bigcup_{k=1}^{4} L_k =]-2,2[\setminus\{0\}$.

(d) Aufgrund der Äquivalenz $|x^2+x-2| < x \iff |x+2| \cdot |x-1| < x$ unterscheiden wir in

- $x < -2$: $x^2+x-2 < x \iff x^2 < 2 \implies L_1 = \emptyset$;
- $-2 \leq x < 1$: $-x^2-x+2 < x \iff 3 < (x+1)^2 \implies L_2 =]\sqrt{3}-1, 1[$;
- $1 \leq x$: $x^2+x-2 < x \iff x^2 < 2 \implies L_3 = [1, \sqrt{2}[$;

Aufgrund der Nichtnegativität des Betrages könnten wir gleich darauf schließen, dass nur positive Zahlen in der Lösungsmenge sind. Die Lösungsmenge ist somit $L = \bigcup_{k=1}^{3} L_k =]\sqrt{3}-1, \sqrt{2}[$.

(e) Die Ungleichung $\frac{x+1}{x} \leq |x|$ ist nur für $x \neq 0$ definiert:

- $x > 0$: $\frac{x+1}{x} \leq x \implies 0 \leq x^2-x-1 \implies \frac{5}{4} \leq \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \implies L_1 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right[$.
- $x < 0$: $\frac{x+1}{x} \leq -x \implies 0 \leq x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \implies L_2 =]-\infty, 0[$.

Also ist $L =]-\infty, 0[\cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right[$.

(f) Wir unterscheiden in

- $x < -2$: $|x+2|-|x-2| \geq 2 \iff -(x+2)+(x-2) \geq 2 \iff -4 \geq 2 \implies L_1 = \emptyset$;
- $-2 \leq x < 2$: $|x+2|-|x-2| \geq 2 \iff (x+2)+(x-2) \geq 2 \iff x \geq 1 \implies L_1 = [1,2[$;
- $2 \leq x$: $|x+2|-|x-2| \geq 2 \iff (x+2)-(x-2) \geq 2 \iff 4 \geq 2 \implies L_1 = [2,\infty[$.

Die Lösungsmenge ist somit $L = \bigcup_{k=1}^{3} L_k = [1, \infty[$.

(g) Wegen $||x+1|-2| \leq 1 \iff -1 \leq |x+1|-2 \leq 1 \iff 1 \leq |x+1| \leq 3$ erhalten wir als Lösungsmenge $L = [-4,-2] \cup [0,2]$.

Aufgabe 4.5: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) $\dfrac{1}{|x-2|} > \dfrac{1}{1+|x-1|}$ (b) $(x-1)^2 - 2 \geq |x|$ (c) $|3-x| \geq 2$ (d) $\big||3-x|-2\big| \leq |x-1|$

Lösung:

(a) Zunächst halten wir fest, dass $2 \notin L$ gilt. Für $x \neq 2$ ist die Ungleichung zu $1+|x-1| > |x-2|$ äquivalent. Wir unterscheiden somit in

- $x > 2$: $1+|x-1| > |x-2| \iff x = 1+(x-1) > x-2 \iff 0 > -2$, also $L_1 = \ ]2,\infty[$;
- $1 \leq x < 2$: $1+|x-1| > |x-2| \iff x = 1+(x-1) > -(x-2) \iff x > 1$, also $L_2 = \ ]1,2[$;
- $x < 1$: $1+|x-1| > |x-2| \iff 1-(x-1) > -(x-2) \iff 2 > 2$, also $L_3 = \emptyset$;

Die Lösungsmenge ist somit $L = \bigcup_{k=1}^{3} L_k = \ ]1,\infty[\setminus\{2\}$.

(b) Die Lösungsmenge ist $L = \bigcup_{k=1}^{2} L_k = \mathbb{R} \setminus \left]\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right[$, denn wir unterscheiden in

- $x > 0$: $(x-1)^2 - 2 \geq |x| \iff (x-1)^2 - 2 \geq x \iff x^2 - 3x - 1 \geq 0$, also $L_1 = \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \infty\right[$;
- $x \leq 0$: $(x-1)^2 - 2 \geq |x| \iff (x-1)^2 - 2 \geq -x \iff x^2 - x - 1 \geq 0$, also $L_2 = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$.

(c) Die Lösungsmenge ist $L = \bigcup_{k=1}^{2} L_k = \mathbb{R}\setminus]1,5[$, denn wir unterscheiden in

- $x > 3$: $|3-x| \geq 2 \iff -(3-x) \geq 2 \iff x \geq 5$, also $L_1 = \ [5,\infty[$;
- $x \leq 3$: $|3-x| \geq 2 \iff (3-x) \geq 2 \iff 1 \geq x$, also $L_2 = \ ]-\infty,1]$.

(d) (i) Unter Verwendung der letzten Ungleichung (vgl. (c)) unterscheiden wir in

- $x \geq 5$: $\big||3-x|-2\big| \leq |x-1| \iff x-5 \leq x-1 \iff 0 \leq 4$, also $L_1 = \ [5,\infty[$;
- $1 < x < 5$:
  $$\big||3-x|-2\big| \leq |x-1| \iff 3 \leq x + |3-x| \iff \begin{cases} 3 \leq 3, & x < 3, \\ 3 \leq x, & x \geq 3, \end{cases} \text{ also } L_2 = \ ]1,5[;$$
- $x \leq 1$: $\big||3-x|-2\big| \leq |x-1| \iff 1-x \leq 1-x \iff 0 \leq 0$, also $L_3 = \ ]-\infty,1]$.

Somit ist für $\big||3-x|-2\big| \leq |x-1|$ die Lösungsmenge $L = \bigcup_{k=1}^{3} L_k = \mathbb{R}$.

(ii) Unter Verwendung der letzten Ungleichung (vgl. (c)) unterscheiden wir in

- $x \geq 5$: $\big||3-x|-2\big| \geq |x-1| \iff x-5 \geq x-1 \iff 0 \geq 4$, also $L_1 = \emptyset$;
- $1 < x < 5$: $\big||3-x|-2\big| \geq |x-1| \iff 3 \geq x + |3-x| \iff 3 \geq x$, also $L_2 = \ ]1,3]$;
- $x \leq 1$: $\big||3-x|-2\big| \geq |x-1| \iff 1-x \geq 1-x \iff 0 \geq 0$, also $L_3 = \ ]-\infty,1]$.

Somit ist für $\big||3-x|-2\big| \geq |x-1|$ die Lösungsmenge $L = \bigcup_{k=1}^{3} L_k = \ ]-\infty,3]$.

Aufgabe 4.6:

(a) Führen Sie die Polynomdivisionen $(x^4 - 1) : (x - 1)$ und $(x^4 - 36) : (x^2 - 2x + 3)$ durch.

(b) Finden Sie jeweils die Menge aller Nullstellen über dem Körper $\mathbb{K}$ und bestimmen Sie die Vielfachheit jeder Nullstelle. Verwenden Sie auch die Methode der quadratischen Ergänzung.

(i) $x + \pi$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(ii) $x^2 - 2$ sowie $x^2 + 2x - 8$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(iii) $x^3 - x^2 + x - 1$ und $x^3 - x^2 - x + 1$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(iv) $x^4 - 8x^2 - 9$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(v) $x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 27x^2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

(vi) $x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Hinweis: Besitzt ein Polynom mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ eine Nullstelle $a \in \mathbb{Q}$, so ist $a \in \mathbb{Z}$.

Lösung:

(a) Die erste Polynomdivision ergibt $(x^4 - 1) : (x - 1) = x^3 + x^2 + x + 1$ und geht somit auf, die zweite Polynomdivision ergibt dagegen

$$(x^4 - 36) : (x^2 - 2x + 3) \;=\; x^2 + 2x + 1 - \frac{4x + 39}{x^2 - 2x + 3}.$$

(b) (i) Wegen $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ besitzt das Polynom $x + \pi$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ keine Nullstelle und über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die einfache Nullstelle $-\pi$.

(ii) Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ besitzt $x^2 - 2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ keine Nullstelle und wegen $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die beiden einfachen Nullstellen $\pm\sqrt{2}$.
Da sich $x^2 + 2x - 8$ als $(x - 2)(x + 4)$ schreiben lässt, besitzt dieses Polynom sowohl über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ als auch über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die beiden einfachen Nullstellen 2 und -4.

(iii) Das Polynom $x^3 - x^2 + x - 1$ besitzt nur ganzzahlige Koeffizienten, daher versuchen wir ganzzahlige Nullstellen zu finden und werden bei $x = 1$ bereits fündig. Nach Polynomdivision ergibt sich $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$. Da aus den Anordnungsaxiomen folgt, dass das Quadrat jeder reellen Zahl nichtnegativ ist, besitzt $x^2 = -1$ keine Lösung in $\mathbb{R}$. Demnach gibt es nur die einfache Nullstelle 1 über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Das Polynom $x^3 - x^2 - x + 1$ besitzt ebenfalls nur ganzzahlige Koeffizienten und die Nullstelle $x = 1$, die wegen $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)^2(x + 1)$ jedoch zweifach ist, und die einfache Nullstelle -1 über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(iv) Das biquadratische Polynom $x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$ besitzt mit der gleichen Begründung wie zuvor sowohl über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ als auch über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nur die beiden einfachen Nullstellen ± 3.

(v) Wegen $x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 27x^2 = x^2(x^3 + 3 \cdot (-3)^1 x^2 + 3 \cdot (-3)^2 x + (-3)^3) = x^2(x - 3)^3$ besitzt das Polynom 0 als zweifache Nullstelle und 3 als dreifache Nullstelle über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

(vi) Da das bikubische Polynom $x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6$ für $x^2 = 1$ verschwindet, können wir Polynomdivision durchführen und erhalten $x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6 = (x^2 - 1)(x^4 - 5x^2 + 6)$, wobei der zweite Faktor wiederum ein biquadratisches Polynom ist, welches für $x^2 = 2$ und $x^2 = 3$ verschwindet. Also erhalten wir die einfachen Nullstellen $\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$ und somit

$$x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6 \;=\; (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3) \;=\; (x + 1)(x - 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}).$$

Tutoriumsaufgabe T.6: (Rechnen in $\mathbb{Q}$)

(a) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(i) $S_1 := [7m - (5n+3)] - [-(6n+7) + 5m - (3n-2)]$

(ii) $S_2 := (-12a + 20b)15x - 20x(14b - 9a)$

(iii) $S_3 := 10ab(8a - 4b + 5c) - (15a + 12b - 9c)5ab$

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Potenzen:

$(2x)^2$, $(-2x)^2$, $2(-x)^2$, $-2(-x^2)$, $(2x)^3$, $(-2x)^3$, $2(-x)^3$, $-2(-x)^3$

(c) Multiplizieren Sie aus und/oder fassen Sie zusammen:

(i) $T_1 := (-a - 2b)(a + 3b)$ (ii) $T_2 := (c + b)(c - b + 2)$

(iii) $T_3 := 35 - (11 - 5x)(3 - 2x^2) + 2x^2 + 3x^2 - 4x$

(d) Bestimmen Sie $\boxed{?}$ in

(i) $\dfrac{x+2y}{x-y} = \dfrac{\boxed{?}}{x^2 - y^2}$ (ii) $\dfrac{5a+3b}{5a-3b} = \dfrac{25a^2 - 9b^2}{\boxed{?}}$ (iii) $\dfrac{2x+y}{x+y} = \dfrac{4x^2 + 4xy + y^2}{\boxed{?}}$

(e) Kürzen Sie die folgenden Brüche:

(i) $\dfrac{8xy + 4xz}{2x}$ (ii) $\dfrac{ax - ay}{ax^2 - ay^2}$ (iii) $\dfrac{8x^3y^2 - 6x^2y^3}{24x^2y^2}$ (iv) $\dfrac{r^2 - 10rs + 25s^2}{r^2 - 25s^2}$

Lösung:

(a) (i) $S_1 = 2m + 4n + 2$ (ii) $S_2 = 20bx$ (iii) $S_3 = 5a^2b - 100ab^2 + 95abc$

(b)

$$\begin{array}{rclcrclcrclcrcl}
(2x)^2 &=& 4x^2 &,& (-2x)^2 &=& 4x^2 &,& 2(-x)^2 &=& 2x^2 &,& -2(-x^2) &=& 2x^2\ , \\
(2x)^3 &=& 8x^3 &,& (-2x)^3 &=& -8x^3 &,& 2(-x)^3 &=& -2x^3 &,& -2(-x)^3 &=& 2x^3\ .
\end{array}$$

(c) Es gelten

(i) $T_1 := (-a - 2b)(a + 3b) = -a^2 - 5ab - 6b^2$

(ii) $T_2 := (c + b)(c - b + 2) = c^2 + 2c - b^2 + 2b$

(iii) $T_3 := 35 - (11 - 5x)(3 - 2x^2) + 2x^2 + 3x^2 - 4x = -7x^3 + 24x^2 + 11x + 2$

(d) (i) $\boxed{?} = (x + 2y)(x + y) = x^2 + 3xy + 2y^2$ (ii) $\boxed{?} = (5a - 3b)^2 = 25a^2 - 30ab + 9b^2$

(iii) $\boxed{?} = (x + y)(2x + y) = 2x^2 + 3xy + y^2$

(e) (i) $\dfrac{8xy + 4xz}{2x} = \dfrac{4x(2y+z)}{2x} = 2(2y + z)$ (ii) $\dfrac{ax - ay}{ax^2 - ay^2} = \dfrac{a(x-y)}{a(x-y)(x+y)} = \dfrac{1}{x+y}$

(iii) $\dfrac{8x^3y^2 - 6x^2y^3}{24x^2y^2} = \dfrac{2x^2y^2(4x - 3y)}{24x^2y^2} = \dfrac{4x - 3y}{12}$

(iv) $\dfrac{r^2 - 10rs + 25s^2}{r^2 - 25s^2} = \dfrac{(r - 5s)^2}{(r - 5s)(r + 5s)} = \dfrac{r - 5s}{r + 5s}$

Tutoriumsaufgabe T.7: Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

(a) $(2a^2 + 18a - 20) : (a + 10)$ (b) $(8a^2 - 10a - 3) : (2a - 3)$ (c) $(x^3 + y^3) : (x + y)$

(d) $(5p^2 + 3pq + 9p + 6q - 2) : (5p + 3q - 1)$

Lösung:

(a) $(2a^2 + 18a - 20) : (a + 10) \;=\; 2a - 2$

(b) $(8a^2 - 10a - 3) : (2a - 3) \;=\; 4a + 1$

(c) $(x^3 + y^3) : (x + y) \;=\; x^2 - xy + y^2$

(d) $(5p^2 + 3pq + 9p + 6q - 2) : (5p + 3q - 1) \;=\; p + 2$

Tutoriumsaufgabe T.8: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $L = \{x \in \mathbb{D}\colon S(x) = T(x)\}$ für:

(a) $\sqrt{x} = 5$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x \geq 0\}$,

(b) $\dfrac{x^3}{x} = 4$ auf der Menge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq 0\} \;=\; \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(c) $bx + c = 0$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine lineare Gleichung*),

(d) $x^2 = a$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine quadratische Gleichung ohne lineares Glied*),

(e) $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ (*allgemeine quadratische Gleichung*),

(f) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = -x$ auf $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

(g) $\sqrt{x} = 2 - x$ auf $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x \geq 0\}$.

Lösung:

(a) $L = \{25\}$.

(b) $L = \{-2, 2\}$.

(c) Fall 1: $b \neq 0$: $L = \left\{-\frac{c}{b}\right\}$

Fall 2: $b = 0$: (i) $c = 0$: $L = \mathbb{R}$ (ii) $c \neq 0$: $L = \emptyset$.

(d) Falls $a < 0$ ist $L = \emptyset$, falls $a = 0$ ist $L = \{0\}$ und falls $a > 0$ ist $L = \{-\sqrt{a}, +\sqrt{a}\}$.

(e) Wir setzen $p := \frac{b}{a}$ und $q := \frac{c}{a}$. Dann können wir äquivalent umformen:

$$ax^2 + bx + c \;=\; a\left(x^2 + px + q\right) \;=\; a\left(x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right) \;=\; 0$$

Da $a \neq 0$, ist dies zusammen mit der ersten binomischen Formel äquivalent zu

$$x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \;=\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \;=\; \frac{p^2}{4} - q$$

Setzen wir $D := \frac{p^2}{4} - q$, gelangen wir zu den folgenden Fallunterscheidungen

(i) $D < 0$: $L = \emptyset$, (ii) $D = 0$: $L = \{-\frac{p}{2}\}$, (iii) $D > 0$: $L = \{-\frac{p}{2} - \sqrt{D}, -\frac{p}{2} + \sqrt{D}\}$.

(f) Multiplikation mit $x - 1$, da dieser Term auf $\mathbb{D}$ immer $\neq 0$ ist, ist eine äquivalente Umformung:

$$x^2 - 1 = -x^2 + x \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2 - x - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{R}$ wäre $\{-\frac{1}{2}, 1\}$. Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{D}$ ist jedoch nur $L = \{-\frac{1}{2}\}$.

(g) Quadrieren liefert $x = 4 - 4x + x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0 = 4 - 5x + x^2$.
Die Lösungsmenge der letzten Gleichung über $\mathbb{D}$ ist zunächst $\{1, 4\}$. Da Quadrieren jedoch möglicherweise die Lösungsmenge vergrößert hat, testen wir mit der ursprünglichen Gleichung:

$x = 1$: $\sqrt{1} = 2 - 1$ wahr,
$x = 4$: $\sqrt{4} = 2 - 4$ falsch.

Damit ist die Lösungsmenge der Ursprungsgleichung $L = \{1\}$.

Polynome und Vektorräume:

- Ein **Polynom** vom **Grad** $n \in \mathbb{N}_0$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit **Koeffizienten** $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}, a_n \neq 0_{\mathbb{K}}$, besitzt die Gestalt
$$p(x) \ := \ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ = \ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ .$$
- Die Nullabbildung $p_0\colon x \mapsto 0$ heißt **Nullpolynom** – ihm ordnen wir den Grad $-\infty$ zu.
- Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein beliebiger Körper. Wir betrachten die Menge
$$\Pi_n \ := \ \left\{ p(x) \ \middle| \ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{K}, k = 0, \dots, n \right\}$$
- Auf dieser Menge Π_n definieren wir eine **additive Verknüpfung** $\oplus\colon \Pi_n \times \Pi_n \to \Pi_n$ für beliebige $p, \tilde{p} \in \Pi_n$ durch
$$\big(p, \tilde{p}\big) \mapsto p(x) \oplus \tilde{p}(x) \ := \ \sum_{k=0}^{n} (a_k + \tilde{a}_k) x^k \ ,$$
mit welcher $(\Pi_n, \oplus)$ zu einer abelschen Gruppe wird.
- Desweiteren betrachten wir für beliebige $\alpha \in \mathbb{K}$ und beliebige $p \in \Pi_n$ eine weitere Verknüpfung $\bullet\colon \mathbb{K} \times \Pi_n \to \Pi_n$, definiert durch
$$\big(\alpha, p\big) \mapsto \alpha \bullet p(x) \ := \ \sum_{k=0}^{n} (\alpha \cdot a_k) x^k \ .$$
- Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, \oplus)$ eine abelsche Gruppe. Dann heißt V ein **Vektorraum über** $\mathbb{K}$ (kurz $\mathbb{K}$-Vektorraum), falls es eine äußere Verknüpfung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ gibt mit:
  (a) $\forall v \in V \ : \ 1_{\mathbb{K}} \bullet v = v$ (Einselement)
  (b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v \in V\colon (\alpha \cdot \beta) \bullet v \ = \ \alpha \bullet (\beta \bullet v)$ (Assoziativität)
  (c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v, w \in V\colon (\alpha + \beta) \bullet v \ = \ (\alpha \bullet v) \oplus (\beta \bullet v)$ und $\alpha \bullet (v \oplus w) \ = \ (\alpha \bullet v) \oplus (\alpha \bullet w)$
- Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann $\mathbb{R}^3$ mit Π_2 identifiziert werden durch die eineindeutige (und mit den Verknüpfungen sogar verträgliche) Zuordnung $\Pi_2 \ni a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mapsto (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$

Aufgabe 5.1:

(a) Zeigen Sie: Für $1 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. (Pascalsches Dreieck)

(b) Beweisen Sie mittels (a) die **Binomialformel** $\forall n \in \mathbb{N}_0\colon (a+b)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(c) Gegeben seien die Polynome $p(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, $q(x) = -4x^5 + x^4 - 13x$ sowie $u(x) = 4$.

  (i) Bestimmen Sie die Polynome $p(x)+q(x)$, $p(x)+u(x)$ sowie $p(x)q(x)$, $p(x)u(x)$ und $p(x)p_0(x)$.
  (ii) Geben Sie jeweils den Grad der Polynome aus (i) an.
  (iii) Bestimmen Sie jeweils das additive Inverse der Polynome aus (i).
  (iv) Geben Sie eine Grad-Formel für die Summe zweier Polynome an.

Lösung:

(a) Für $k=n$ ist offenbar $\binom{n}{n} \;=\; 1 \;=\; 1+0 \;=\; \binom{n-1}{n-1}+\binom{n-1}{n}$. Für $1\le k\le n-1$ folgt

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\\
&= \frac{k(n-1)!+(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\,.
\end{aligned}$$

(b)

- Induktionsanfang: Es gilt $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x^{0-k}y^k \;=\; \binom{0}{0}x^{0-0}y^0 \;=\; 1 \;=\; (x+y)^0$. (A(0))
- Induktionsvoraussetzung: Es gelte $(x+y)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$. (A(n))
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $(x+y)^{n+1} \;=\; \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k$. (A(n+1))
- Beweis: Mittels Aufgabenteil (a) (Pascalsches Dreieck) ergibt sich

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = x(x+y)^n+y(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}\\
&= x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}+y^{n+1}\\
&= x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell-1}x^{n-(\ell-1)}y^{\ell}+y^{n+1} \qquad (\ell=k+1)\\
&= \binom{n+1}{0}x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^k+\binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \qquad (\ell=k)\\
&\overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k
\end{aligned}$$

(c) (i) Mit $p(x)=x^3-4x^2+1$, $q(x)=-4x^5+x^4-13x$ sowie $u(x)=4$ sind

$$\begin{aligned}
p(x)+q(x) &= (x^3-4x^2+1)+(-4x^5+x^4-13x) = -4x^5+x^4+x^3-4x^2-13x+1\,,\\
p(x)+u(x) &= (x^3-4x^2+1)+4 = x^3-4x^2+5\,,\\
p(x)q(x) &= (x^3-4x^2+1)(-4x^5+x^4-13x)\\
&= -4x^8+17x^7-4x^6-4x^5-12x^4+52x^3-13x\,,\\
p(x)u(x) &= (x^3-4x^2+1)\cdot 4 = 4x^3-16x^2+4\,,\\
p(x)p_0(x) &= (x^3-4x^2+1)\cdot 0 = 0\,.
\end{aligned}$$

(ii) Für den Grad ergibt sich jeweils $\deg(p(x))=3$, $\deg(q(x))=5$ und $\deg(u(x))=0$ sowie

$$\begin{aligned}
&\deg(p(x)+q(x)) = 5\,, \quad \deg(p(x)q(x)) = 8\,,\\
&\deg(p(x)+u(x)) = 3\,, \quad \deg(p(x)u(x)) = \deg(p(x)) = 3\,, \quad \deg(p(x)p_0(x)) = -\infty\,.
\end{aligned}$$

(iii) Die additiven Inversen sind

$$\begin{aligned}
-(p(x)+q(x)) &= 4x^5-x^4-x^3+4x^2+13x-1\,,\\
-(p(x)+u(x)) &= -x^3+4x^2-5\,,\\
-(p(x)q(x)) &= 4x^8-17x^7+4x^6+4x^5+12x^4-52x^3+13x\,,\\
-(p(x)u(x)) &= -4x^3+16x^2-4\,,\\
-(p(x)p_0(x)) &= 0\,.
\end{aligned}$$

(iv) $\deg(p(x)+q(x)) \;\le\; \max\big(\deg(p(x)),\deg(q(x))\big)$, wobei Gleichheit im Fall eintritt, wenn p und q unterschiedlichen Grad besitzen bzw. im Fall des gleichen Grades die Koeffizienten vor der höchsten Potenz nicht invers zueinander sind.

Aufgabe 5.2:

(a) Überprüfen Sie, ob die Menge $\{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ mit sinnvollen Verknüpfungen einen linearen Raum bildet.

(b) Zeigen Sie, dass der aus der Schule bekannte Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die von uns eingeführte Definition eines linearen Raumes erfüllt.[4]

Lösung:

(a) Die Menge $M := \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ bildet mit der punktweisen Addition

$$+\colon M \times M \to M, (f,g) \to f+g, \quad \text{mit} \quad f+g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)+g(x)$$

eine abelsche Gruppe $(M,+)$ sowie mit der skalaren Multiplikation

$$\bullet\colon \mathbb{R} \times M \to M, (\alpha, f) \to \alpha f \quad \text{mit} \quad \alpha f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \alpha f(x)$$

einen Vektorraum $(M,+,\bullet)$, denn

- Addition von Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind wieder Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$,
- skalare Vielfache von Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind wieder Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$,
- die Nullabbildung $\mathbf{0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ ist das neutrale Element der Addition,
- zu einem beliebigen Element $f \in M$ ist $-f$ das additive Inverse,
- Assoziativität und Distributivität vererben sich wieder aus $\mathbb{R}$.

(b) Es ist zu zeigen, dass $(\mathbb{R}^3,+)$ eine abelsche Gruppe ist, welche die Eigenschaften (a) bis (c) aus der Definition erfüllt.

- Für je zwei Vektoren (a,b,c) und (d,e,f) aus $\mathbb{R}^3$ ist auch die komponentenweise Summe $(a+d, b+e, c+f)$ wieder in $\mathbb{R}^3$, da die Addition in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.
- Für eine reelle Zahl α und jeden beliebigen Vektor (a,b,c) aus $\mathbb{R}^3$ ist auch $(\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ wieder in $\mathbb{R}^3$, da die Multiplikation in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Insbesondere gilt $1 \cdot (a,b,c) = (a,b,c)$, da 1 das neutrale Element in R ist (d.h., Eigenschaft (a) ist erfüllt).
- Das neutrale Element ist der Nullvektor $(0,0,0)$, da 0 das neutrale Element in $\mathbb{R}$ ist.
  Das additive Inverse zu einem beliebigen Vektor (a,b,c) aus $\mathbb{R}^3$ ist der Vektor $(-a,-b,-c)$, da in zu beliebigem $r \in \mathbb{R}$ das additive Inverse $-r$ ist.
  Die Addition auf $\mathbb{R}^3$ ist assoziativ und kommutativ, da sich dies ebenfalls aus $\mathbb{R}$ auf die einzelnen Komponenten vererbt. Somit ist $(\mathbb{R}^3,+)$ eine abelsche Gruppe.
- Die Assoziativität für die skalare Multiplikation ist ebenso auf die Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$ zurückzuführen (d.h., Eigenschaft (b) ist erfüllt).
- Analog folgen

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)\,a \\ (\alpha+\beta)\,b \\ (\alpha+\beta)\,c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a \\ \alpha b + \beta b \\ \alpha c + \beta c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a \\ \beta b \\ \beta c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

sowie

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right) = \alpha \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(a+d) \\ \alpha(b+e) \\ \alpha(c+f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha d \\ \alpha b + \alpha e \\ \alpha c + \alpha f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha d \\ \alpha e \\ \alpha f \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

[4] Dieser kann mit dem Raum der Polynome höchstens zweiten Grades über deren Koeffizienten identifiziert werden und somit als Unterraum von $\{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ interpretiert werden.

Lineare Abbildungen, Skalarprodukte, Matrizen und lineare Gleichungssysteme:

- Sei V ein beliebiger $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren.
  (a) Unter einer **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ verstehen wir einen Vektor
  $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \qquad \text{mit} \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\ .$$
  (b) Eine Menge $\{v_k \mid k = 1, \dots, n\}$ heißt **linear unabhängig**, wenn für jede Linearkombination mit $\sum \alpha_k v_k = 0_V$ schon $a_k = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$ folgt.
  (c) Eine linear unabhängige Menge $\{v_k \mid k = 1, \dots, n\}$ heißt **Basis** von V, wenn sich jedes Element von V als (sogar eindeutige) Linearkombination der v_k schreiben lässt.
- **Satz:** Jeder Vektorraum hat eine Basis. **Satz:** Jede Basis von $\mathbb{R}^n$ hat genau n Elemente.
- Die Dimension eines Vektorraumes bestimmt sich über die Anzahl der Basiselemente.
- Bei der Multiplikation von Polynomen gilt: $\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$
- Eine Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt **linear**, wenn
  $$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\colon \forall v, w \in \mathbb{R}^n\colon A(\lambda v + \mu w) \ = \ \lambda A(v) \ + \ \mu A(w)$$
- Eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt
  - **injektiv** $:\Longleftrightarrow \forall v, w \in \mathbb{R}^n\colon\ (A(v) = A(w) \Longrightarrow v = w)$;
  - **surjektiv** $:\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^m\colon \exists v \in \mathbb{R}^n\colon A(v) = y$;
  - **bijektiv** $:\Longleftrightarrow$ A injektiv und surjektiv.
- Die Menge $\{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0_{\mathbb{R}^m}\}$ heißt **Kern** von A.
- $v^{\mathrm{T}} \ := \ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix}$ heißt der zu v **transponierte** Vektor.
- Die durch $v^{\mathrm{T}} w := \sum_{k=1}^{n} v_k w_k$ definierte Verknüpfung $\cdot\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **Innenprodukt** oder **Skalarprodukt** auf $\mathbb{R}^n$.
- Für eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ zwischen zwei beliebigen Vektorräumen V und W sei $\mathrm{Bild}(A) := \{w \in W \mid \exists v \in V\colon A(v) = w\}$ das **Bild**.

Aufgabe 6.1: Wählen Sie sich zwei beliebige konkrete Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ aus.

(a) Bestimmen Sie die Innenprodukte $v^{\mathrm{T}} w$ und $w^{\mathrm{T}} v$. Was fällt Ihnen auf ?

(b) Überprüfen Sie, ob v und w linear unabhängig sind. Können v und w eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden ?

(c) Wählen Sie sich eine beliebige konkrete Abbildung $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und wenden Sie diese auf die Vektoren v und w an. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Abbildung A auf die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ anwenden ? Bestimmen Sie weiterhin sowohl das Bild als auch den Kern von A. Untersuchen Sie, ob A injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

Lösung:

(a) Es gilt $v^{\mathrm{T}} w = w^{\mathrm{T}} v = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $v_1 = \alpha w_1$ gilt. Erfüllt nun dieses α auch die Gleichungen $v_2 = \alpha w_2$ sowie $v_3 = \alpha w_3$, dann sind v und w linear abhängig, anderenfalls sind sie linear unabhängig.

Da jede Basis des $\mathbb{R}^3$ genau drei Elemente enthalten muss, können v und w keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Im Falle der linearen Unabhängigkeit von v und w können wir jedoch die Menge $\{v, w\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzen, indem wir uns ein $u \in \mathbb{R}^2$ suchen, welches sowohl von v als auch von w linear unabhängig ist.[5]

(c) Eine beliebige Abbildung $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ können wir mit Hilfe der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

darstellen. Wenden wir diese auf die Matrizen v bzw. w an, so erhalten wir

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad Aw = \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + a_{13}w_3 \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + a_{23}w_3 \end{pmatrix}$$

Wenden wir die Abbildung auf die drei Einheitsvektoren an, so erhalten wir

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \qquad \text{sowie} \qquad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad Ae_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

also genau die drei Spalten der Matrix A. Zum Bild können folgende Situationen auftreten:

- Sind mindestens zwei Spalten von A linear unabhängig, dann ist $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^2$;
- Sind alle Spalten von A linear abhängig und mindestens eine Spalte $s \in \mathbb{R}^2$ ungleich dem Nullvektor im $\mathbb{R}^2$, dann gilt $\text{Bild}(A) = \text{Erzeugnis}\{s\}$, d.h., das Bild ist ein eindimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^2$ (eine Gerade in der Ebene durch den Nullpunkt).
- Sind alle Spalten identisch mit dem Nullvektor im $\mathbb{R}^2$, so gilt $\text{Bild}(A) = \{0\}$, d.h., das Bild stimmt mit dem Nullraum überein.

Der Kern der Abbildung besteht aus allen Vektoren des $\mathbb{R}^3$, welche orthogonal auf beiden Zeilen der Matrix A stehen:

- Sind die Zeilen der Matrix A linear unabhängig, so erhalten wir durch Bildung des Kreuzproduktes einen Vektor, welcher den Kern von A aufspannt.
- Sind die Zeilen linear abhängig und mindestens eine Zeile $z \in \mathbb{R}^3$ ungleich dem Nullvektor im $\mathbb{R}^3$, so ist der Kern von A identisch mit der Ebene, welche in der Hessischen Normalform $x^{\mathrm{T}}(z - 0) = 0$ lautet.
- Sind alle Zeilen von A identisch mit dem Nullvektor im $\mathbb{R}^3$, so ist $\mathbb{R}^3$ der Kern von A.

Da – wie eben untersucht – der Kern von A mindestens eindimensional sein muss, also nicht mit dem Nullraum übereinstimmen kann, kann die Matrix weder injektiv noch bijektiv sein. Sie ist aber genau dann surjektiv, wenn der Kern eindimensional ist bzw. $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^2$ gilt, d.h., wenn mindestens zwei Spalten von A linear unabhängig sind.

Konkrete Beispiele:

- Wir betrachten die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{aligned} A_1 e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 \\ 5\cdot 1 + 7\cdot 0 + 8\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ A_1 e_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 5\cdot 0 + 7\cdot 1 + 8\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \\ A_1 e_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 \\ 5\cdot 0 + 7\cdot 0 + 8\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

[5] Allgemein kann man die lineare Unabhängigkeit dreier Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ schnell überprüfen, in dem man prüft, ob die Determinante der Matrix, welche aus den Spalten der drei Vektoren gebildet werden kann, ungleich 0 ist.

Insbesondere sind die ersten beiden Spalten linear unabhängig, denn die Gleichungen $2 = \alpha \cdot 1$ und $7 = \alpha \cdot 5$ haben offenkundig unterschiedliche Lösungen. Somit ergibt sich $\text{Bild}(A_1) = \mathbb{R}^2$, wonach die Abbildung surjektiv ist. Für den Kern erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{Kern}(A_1) &= \text{Erzeugnis}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\7\\8\end{pmatrix}\right\} = \text{Erzeugnis}\left\{\begin{pmatrix}-5\\7\\-3\end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathbb{R}\colon x = \lambda \begin{pmatrix}-5\\7\\-3\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

- Wir betrachten die Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\4 & 2 & 6\end{pmatrix} \implies \begin{cases}
A_2 e_1 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\4 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 1+1\cdot 0+3\cdot 0\\4\cdot 1+2\cdot 0+6\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \\
A_2 e_2 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\4 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 0\\4\cdot 0+2\cdot 1+6\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \\
A_2 e_3 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\4 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 0+1\cdot 0+3\cdot 1\\4\cdot 0+2\cdot 0+6\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}.
\end{cases}$$

Insbesondere sind sowohl die beiden Zeilen als auch die drei Spalten linear abhängig, denn für die Zeilen gilt $2 \cdot z_1 = z_2$ und für die Spalten $s_1 = 2 \cdot s_2$ sowie $s_3 = 3 \cdot s_2$. Somit gelten

$$\begin{aligned}
\text{Bild}(A_2) &= \text{Erzeugnis}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathbb{R}\colon x = \lambda \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}, \\
\text{Kern}(A_2) &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0\right\} = \text{Erzeugnis}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\colon x = \lambda \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}\right\},
\end{aligned}$$

so dass die Abbildung auch nicht surjektiv ist.

Aufgabe 6.2:

(a) Betrachten Sie ein beliebiges selbstgwähltes lineares Gleichungssystem, bestehend aus 3 Gleichungen und 3 Unbekannten. Versuchen Sie dieses systematisch zu lösen.

(b) Führen Sie (a) noch einmal mit Hilfe der Matrix-Vektor-Schreibweise durch.

(c) Besitzt das Gleichungssystem $Ax = 0$ immer eine Lösung ?
Falls ja, hat diese Menge eine gewisse Struktur ?

(d) Diskutieren Sie die Lösbarkeit eines allgemeinen linearen Systems $Ax = b$.

Lösung:

(a) Betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$2x + 5y + 3z = 9\,, \quad x + 4z = 7\,, \quad y + 2z = 2\,,$$

so sehen wir, dass Umstellen der zweiten Gleichung $x = 7 - 4z$ und der dritten Gleichung $y = 2 - 2z$ liefert. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt dann

$$2(7-4z) + 5(2-2z) + 3z = 9 \implies 24 - 15z = 9 \implies 1 = z\,,\quad x = 3\,,\quad y = 0\,.$$

(b) In Matrix-Vektor-Schreibweise lautet das Gleichungssystem aus (a) dann

$$\begin{pmatrix}2&5&3\\1&0&4\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\7\\2\end{pmatrix} \qquad \text{oder auch} \qquad \begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\\2&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\9\end{pmatrix}.$$

Die zweite Schreibweise hat den Vorteil, dass Sie schon recht nahe an einer Dreiecksform ist, also wenige Gauß-Schritte durchgeführt werden müssen:

$$\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\\2&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\9\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\\0&5&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\-5\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\\0&0&-15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\-15\end{pmatrix}$$

Sogenanntes Rückwärtseinsetzen liefert nun erneut $z = 1$, $y = 0$ und $x = 3$.

(c) Lineare Abbildungen haben die Eigenschaft $\lambda Av = A(\lambda v)$, so dass einerseits für $\lambda = 0$ folgt, dass $0 \in \mathrm{Kern}(A)$ gilt. Andererseits liefert die Linearität auch, dass mit $v \in \mathrm{Kern}(A)$ auch jedes skalare Vielfache von v im Kern von A liegt. Insbesondere werden Linearkombinationen von Vektoren aus dem Kern aufgrund der Linearität ebenfalls auf die 0 abgebildet, so dass der Kern einen Vektorraum bildet.

(d) Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $b \in \mathrm{Bild}(A)$ gilt, d.h., wenn b als eine Linearkombination der Spalten von A darstellbar ist. Insbesondere bedeutet dies, dass für surjektives A immer eine Lösung existiert. Die Lösung ist zusätzlich eindeutig, wenn der Kern von A trivial ist, d.h., mit dem Nullraum übereinstimmt.

Bonus: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$. Gibt es eine lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ mit

$$\begin{aligned} \alpha((5,0,3)) &= (1,0)\ , \\ \alpha((3,-2,1)) &= (0,1) \ \text{ und} \\ \alpha((3,3,4)) &= (1,1)\ ? \end{aligned}$$

Sofern die drei Vektoren $(5, 0, 3)$, $(3, -2, 1)$ und $(3, 3, 4)$ linear unabhängig sind, können wir stets mit ja antworten. Anderenfalls müssten wir mit Hilfe der Linearität auf Konsistenz prüfen.

Da die Vektoren über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ aufgrund der Eindeutigkeit des homogenen LGS

$$\begin{pmatrix}5&3&3\\0&-2&3\\3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}5&3&3\\0&-2&3\\0&-\frac{4}{5}&\frac{11}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}5&3&3\\0&-2&3\\0&0&\frac{5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, gibt es eine derartige lineare Abbildung, da die drei Vektoren dann eine Basis bilden, auf denen dann eindeutig eine lineare Abbildung festgelegt ist.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ existiert jedoch keine lineare Abbildung, da der Vektor $(1, 0, 1)$ durch die erste Gleichung auf den Vektor $(1, 0)$ und durch die zweite Gleichung auf den Vektor $(0, 1)$ abgebildet werden soll, jedoch muss die Abbildung eindeutig sein.

Der Körper der komplexen Zahlen und Abstandsbegriffe:

(a) Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^2$ mit den beiden Verknüpfungen $\oplus, \otimes \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche definiert seien durch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix} .$$

(b) **Satz**: Es ist $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ ein Körper. **Diesen nennen wir** $\mathbb{C}$. Es gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) Kürzen wir den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit i ab und identifizieren wir die reellen Zahlen r mit den Vektoren $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$, so lässt sich jedes Element eindeutig als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben. Es folgt also $i^2 = -1$.

(d) Sei V ein ($\mathbb{R}$-)Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|.\| \colon V \to \mathbb{R}$ mit

(i) $\forall v \in V \colon \|v\| = 0 \iff v = 0_V$ (**Definitheit**)

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall v \in V \colon \|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ (**Homogenität**)

(iii) $\forall v, w \in V \colon \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (**Dreiecksungleichung**)

Aufgabe 7.1:

(a) Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die folgenden Matrix-Vektor-Multiplikationen berechnen ?

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie das Matrizenprodukt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
Was können wir im Fall $(a, b) \neq (0, 0)$ sehen ?
Welche Struktur hat die Menge aller dieser Matrizen mit der Matrizenmultiplikation ?

(c) Verwenden Sie (b) um auf das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl zu schließen.

Lösung:

(a) Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $a + ib$ und $c + id$ ist kommutativ, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd \\ bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

(b) + (c) Aus dem Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = (a^2+b^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sehen wir im Fall $(a, b) \neq (0, 0)$:

- Jede komplexe Zahl $a + ib$ ungleich der Null (also mit $(a, b) \neq (0, 0)$) besitzt das multiplikative Inverse

$$(a + ib)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} (a - ib) .$$

- Die Transponierte der obigen Matrix stimmt bis auf einen multiplikativen Faktor mit der Inversen der Matrix selbst überein. Matrizen mit dieser Eigenschaft nennen wir **fast orthogonal**. Die Menge aller fast orthogonalen Matrizen bildet mit der Multiplikation eine nicht-kommutative Gruppe.

Aufgabe 7.2: Berechnen Sie und tragen Sie die Ergebnisse in die Gaußsche Zahlenebene ein.

(a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\mathrm{i}\right)(12+18\mathrm{i})$. (b) $\frac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^3}$ (c) $\frac{(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^4}$

Lösung:

(a) Es ist $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\mathrm{i}\right)(12+18\mathrm{i}) = (4+5\mathrm{i})(2+3\mathrm{i}) = (8-15)+\mathrm{i}(12+10) = -7+22\mathrm{i}$.

(b) Es ist $\frac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^3} \;=\; \frac{(1+\mathrm{i})^8}{((1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}))^3} \;=\; \frac{(2\mathrm{i})^4}{8} = 2$.

(c) Es gilt $\frac{(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^4} = \frac{(1-\mathrm{i})^3(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^4(1-\mathrm{i})^4} = \frac{((1-\mathrm{i})^2)^3(1-\mathrm{i})}{2^4} = \frac{(-2\mathrm{i})^3(1-\mathrm{i})}{16} = \frac{8\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{16} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

Aufgabe 7.3:

Seien $\mathbf{w},\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\mathbf{w} := (1,4)$ beziehungsweise $\mathbf{x} := (-3,2)$ und die Vektoren $\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ durch $\mathbf{y} = (-2,2,1)$ beziehungsweise $\mathbf{z} = (0,1,0)$.

(i) Berechnen Sie $\mathbf{w}+2\mathbf{x}$ und $3\mathbf{z}-\mathbf{y}$ jeweils einmal rechnerisch und einmal zeichnerisch.

(ii) Berechnen Sie für jeden der oben definierten Vektoren $\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ jeweils seine Länge in den Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$, welche auf dem $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ definiert sind durch

$$\|\mathbf{x}\|_1 \;:=\; \sum_{k=1}^{n} |x_k|\;, \qquad \|\mathbf{x}\|_2 \;:=\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\;, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty \;:=\; \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$$

Lösung:

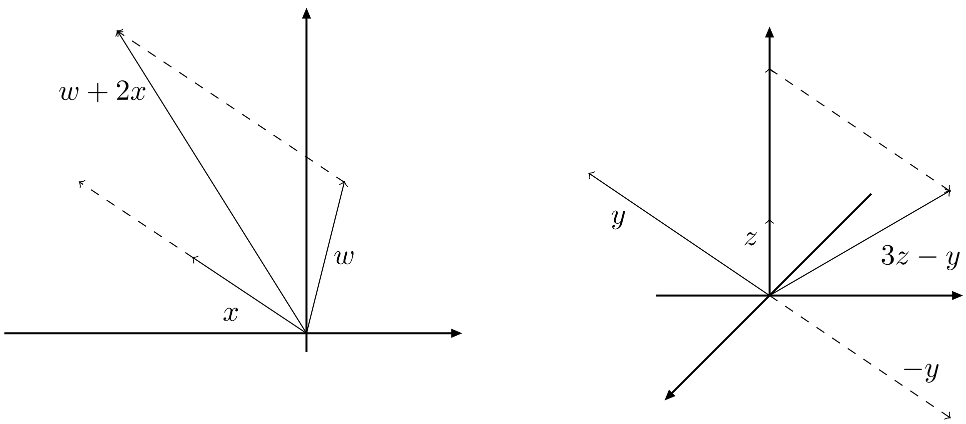


Abbildung 1: Geometrische Darstellung der Addition von $w+2x$ und $3z-y$

(i) Rechnerisch erhält man aus der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation

$$\mathbf{w}+2\mathbf{x} \;=\; \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}1-6\\4+4\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}-5\\8\end{pmatrix}$$

und entsprechend

$$3\mathbf{z}-\mathbf{y} \;=\; 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}0+2\\3-2\\0-1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(ii) Für die Normen erhalten wir

$$\begin{array}{lll}
\|\mathbf{w}\|_1 = 1+4 = 5, & \|\mathbf{w}\|_2 = \sqrt{1+(4)^2} = \sqrt{17}, & \|\mathbf{w}\|_\infty = \max\{1,4\} = 4, \\
\|\mathbf{x}\|_1 = |-3|+2 = 5, & \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}, & \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|-3|,2\} = 3, \\
\|\mathbf{y}\|_1 = |-2|+2+1 = 5, & \|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{(-2)^2+2^2+1^2} = 3, & \|\mathbf{y}\|_\infty = \max\{|-2|,2,1\} = 2, \\
\|\mathbf{z}\|_1 = 0+1+0 = 1, & \|\mathbf{z}\|_2 = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1, & \|\mathbf{z}\|_\infty = \max\{0,1\} = 1.
\end{array}$$

Aufgabe 7.4:

(a) Bestimmen Sie die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für welche die Ungleichung $\big|2|x|-1\big| \leq 3$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle x mit $\big|x-|x|\big| \leq 1$.

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2|+2 \leq \dfrac{4}{x}$.

Lösung:

(a) Es gilt $|2y-1| \leq 3$ genau dann, wenn $-3 \leq 2y-1 \leq 3$ gilt, also gilt $|2|x|-1| \leq 3$ genau dann, wenn $-1 \leq |x| \leq 2$ gilt, d.h. wenn $x \in [-2,2]$ gilt.

(b) Die Ungleichung $\big|x-|x|\big| \leq 1$ ist zu $-1 \leq x-|x| \leq 1$ äquivalent.

Fall 1: Ist nun $x \geq 0$, dann ist die obige Ungleichungskette zu $-1 \leq x-x = 0 \leq 1$ äquivalent und offensichtlich erfüllt. Somit erhalten wir $L_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ als eine erste Lösungsmenge.

Fall 2: Ist dagegen $x < 0$, dann ist die Ungleichungskette zu $-1 \leq x+x = 2x \leq 1$ äquivalent und somit zu $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Zusammen mit der Ungleichung $x < 0$ erhalten wir demnach $L_2 := \big\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 0\big\}$ als eine zweite Lösungsmenge.

Somit ist $L := L_1 \cup L_2 = \big\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2}\big\}$ die gesamte Lösungsmenge, d.h. insgesamt ist die Ungleichung $|x-|x|| \leq 1$ also für alle x mit $x \geq -\frac{1}{2}$ erfüllt.

(c) Zunächst einmal muss $x \neq 0$ gelten, andernfalls ist die rechte Seite nicht definiert. Desweiteren kommen nur positive x in Frage, da sonst die linke Seite positiv, die rechte aber negativ ist. Somit genügt es, die verbleibenden Fälle $0 < x \leq 2$ und $x > 2$ zu betrachten:

Fall 1: Für $0 < x \leq 2$ erhalten wir die folgenden Äquivalenzen:

$$-(x-2)+2 \leq \frac{4}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad 4-x \leq \frac{4}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x^2-4x+4$$

Die letzte Ungleichung ist wegen $x^2-4x+4 = (x-2)^2 \geq 0$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Somit erhalten wir $L_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\} =]0,2]$ als eine erste Lösungsmenge.

Fall 2: Für $x > 2$ ist die Ungleichung zu $(x-2)+2 \leq 4/x$, d.h. zu $x^2 \leq 4$ äquivalent. Da jedoch $x^2 \leq 4$ und $x > 2$ nicht gleichzeitig erfüllt sein können, ist $L_2 := \emptyset$.

Wir erhalten somit $L := L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\} =]0,2]$ als Lösungsmenge, d.h. insgesamt ist die Ungleichung $|x-2|+2 \leq \frac{4}{x}$ also für alle x mit $0 < x \leq 2$ erfüllt.

Was noch so alles kommt . . . :

(a) Für Polynome $p(x)$, $q(x)$ mit $\deg(q(x)) = m > n = \deg(p(x))$ heißt eine Funktion der Gestalt

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j}$$

gebrochen rationale Funktion (vgl. Polynomdivision mit Rest).

(b) Zur Vereinfachung gibt es in Abhängigkeit der Vielfachheit der Nullstellen des Nennerpolynoms verschiedene Ansätze für eine **Partialbruchzerlegung**.

(c) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen a, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $n > N$ auch $|x_n - a| < \varepsilon$ folgt. Dann heißt a der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wir schreiben

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = a\ .}$$

(d) Eine Funktion $f\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in [c, d]$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in [c, d]$ aus $|x - a| < \delta$ auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ folgt. Wir schreiben

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ ,}$$

denn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $[c, d]$ mit a als Grenzwert ist dann auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $f(a)$.

(e) Eine Funktion $f\colon]c, d[\to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $a \in]c, d[$, falls es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $h \neq 0$ aus $|h| < \delta$ auch $\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - b\right| < \varepsilon$.

(f) Wir schreiben

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = b =: f'(a)}$$

(g) Ableitungsregeln: **Satz: [Algebraische Differentiationsregeln]**

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, \lambda f, fg\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in D$ gelten

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) \qquad \textbf{(Linearität)} \tag{8.1}$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \textbf{(Produktregel)} \tag{8.2}$$

Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in D$ gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{\big(g(x)\big)^2} \qquad \textbf{(Quotientenregel)} \tag{8.3}$$

Satz [Ableitung der Umkehrfunktion]: Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x mit $f'(x) \neq 0$ und besitzt f in der Umgebung von x die Umkehrfunktion f^{-1}, dann gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(f(x))\right)}\ , \quad \text{also} \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}\ . \tag{8.4}$$

Satz [Kettenregel]:

Sind $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$ und ist f differenzierbar in $x \in D$ und g differenzierbar in $y := f(x) \in E$, dann ist die Komposition $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ (sprich: „g nach f“) ebenfalls differenzierbar in x mit

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)\ . \tag{8.5}$$

Aufgabe 8.1: (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte (i) $\dfrac{2n^3+n^2-5}{(n+1)^3}$ (ii) $\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2+3}$

(b) Zeigen Sie für konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Rechenregeln

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) .$$

Lösung:

(a) Nach Rechenregeln für konvergente Folgen gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n^2-5}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 5\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^3} = \frac{2+0-0}{(1+0)^3} = 2 .$$

Zusammen mit der Stetigkeit der Wurzel und den Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2+3} &= \frac{(n^2-3)-(n^2+3)}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2+3}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{-6}{\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} \longrightarrow 0 \cdot \frac{-6}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} = 0 .\end{aligned}$$

(b) Da $a_n \to a$ für $n \to \infty$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$, d.h., die Aussagen

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_{\varepsilon,a} \in \mathbb{N}\colon \ (n \geq N_{\varepsilon,a} \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_{\varepsilon,b} \in \mathbb{N}\colon \ (n \geq N_{\varepsilon,b} \Longrightarrow |b_n - b| < \varepsilon)$$

gelten, folgt zu beliebigen $\varepsilon > 0$ auch die Existenz eines $N_{\varepsilon,\pm} := \max\left(N_{\frac{\varepsilon}{2},a}, N_{\frac{\varepsilon}{2},b}\right) \in \mathbb{N}$, so dass

$$n \geq N_{\varepsilon,\mp} \implies |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

gilt, also $(a_n \pm b_n) \to (a \pm b)$ für $n \to \infty$.
Analog folgt jeweils die Existenz eines

$$N_{\varepsilon,\cdot} := \max\left(N_{\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)},a}, N_{\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)},b}, N_{1,b}\right) \in \mathbb{N} ,$$

so dass

$$\begin{aligned} n \geq N_{\varepsilon,\cdot} \implies |(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| &= |(a_n - a) \cdot b_n + a \cdot (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \cdot (|b|+1) + (|a|+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} = \varepsilon \end{aligned}$$

gilt, also $(a_n \cdot b_n) \to (a \cdot b)$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 8.2:

(a) Zeigen Sie die Stetigkeit von konstanten und linearen Funktionen sowie die Stetigkeit von Summen, Produkten und Hintereinanderausführungen stetiger Funktionen.

(b) Zeigen Sie die Unstetigkeit von nichtkonstanten Treppenfunktionen.

(c) Zeigen Sie, dass differenzierbare Funktionen auch stetig sind.

(d) Zeigen Sie die Produktregel (8.2). **Bonus:** Was hat diese mit partieller Integration zu tun ?

(e) Zeigen Sie die Kettenregel (8.5). **Bonus:** Was hat diese mit der Substitutionsregel zu tun ?

Lösung:

(a) Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} f_c\colon x \mapsto c &\implies \Big(x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \implies f_c(x_n) = c \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c = f_c(x)\Big)\ , \\ f_\alpha\colon x \mapsto \alpha x &\implies \Big(x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \implies f_\alpha(x_n) = \alpha x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha x = f_\alpha(x)\Big)\ , \end{aligned}$$

also die Stetigkeit von konstanten und linearen Funktionen. Analog ergibt sich mit den Rechenregeln für konvergente Folgen aus der Stetigkeit von f und g wegen

$$\begin{aligned} &(f \pm g)\colon x \mapsto (f(x) \pm g(x)) \\ &\implies \Big(x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \implies (f \pm g)(x_n) = f(x_n) \pm g(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \pm g(x) = (f \pm g)(x)\Big)\ , \\ &(f \cdot g)\colon x \mapsto (f(x) \cdot g(x)) \\ &\implies \Big(x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \implies (f \cdot g)(x_n) = f(x_n) \cdot g(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)\Big)\ . \end{aligned}$$

auch die Stetigkeit von Summen und Produkten stetiger Funktionen. Weiter folgt nun auch aus der Stetigkeit von f und g wegen

$$\begin{aligned} &(f \circ g)\colon x \mapsto (f \circ g)(x) := f(g(x)) \\ &\implies \Big(x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \implies g(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x) \implies (f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(g(x)) = (f \circ g)(x)\Big) \end{aligned}$$

die Stetigkeit der Hintereinanderausführung stetiger Funktionen.

(b) Eine Treppenfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt nur endlich viele Funktionswerte, so dass es Intervalle gibt, auf denen sie konstant ist.
Angenommen, die Treppenfunktion sei nicht konstant. Dann gibt es $a < c < d < e < b$ und $\alpha \neq \beta$ mit $\varphi(x) = \alpha$ für alle $c < x < d$ sowie mit $\varphi(x) = \beta$ für alle $d < x < e$. Aufgrund der Konstanz auf den offenen Teilintervallen $]c,d[$ und $]d,e[$ gilt dann jedoch

$$\lim_{x\searrow d} \varphi(x) = \beta \neq \alpha = \lim_{x\nearrow d} \varphi(x)\ ,$$

so dass φ in d nicht stetig sein kann.

(c) Ist f differenzierbar in a, dann existiert der (endliche !) Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Da der Nenner $x - a$ bei $x \to a$ gegen Null läuft, folgt nun nach Grenzwertgesetzen auch

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right) = \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)\left(\lim_{x\to a}(x - a)\right) \\ &= \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) \cdot 0 = 0\ . \end{aligned}$$

(d) Angenommen, die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien in $a \in \mathbb{R}$, differenzierbar, dann folgt

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \lim_{h\to 0} g(a+h) + f(a) \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \end{aligned}$$

Bonus: Integrieren wir diese Formel, so erhalten wir

$$fg(x) \;=\; \int^x (fg)'(t)dt \;=\; \int^x \big(f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\big)\, dt\ ,$$

welches nach Umstellen $\int^x \left(f'g\right)(t)dt \;=\; fg - \int^x \left(fg'\right)(t)dt$ ergibt. Letzteres ist genau die Formel zur partiellen Integration.

(e) Sind $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$ und ist f differenzierbar in $x \in D$ und g differenzierbar in $\xi := f(x) \in E$, dann folgt mit der Hilfsfunktion

$$f^*(\zeta) \;:=\; \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(\xi)}{\zeta-\xi}, & \text{falls } \zeta \neq \xi, \\ f'(\xi), & \text{falls } \zeta = \xi\ , \end{cases}$$

wegen $\lim\limits_{\zeta\to\xi} f^*(\zeta) = f^*(\xi) = f'(\xi)$ für die Komposition

$$(f\circ g)'(x) = \lim_{y\to x} \frac{(f\circ g)(y) - (f\circ g)(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} f^*(g(y)) \cdot \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = (f'\circ g)(x)\cdot g'(x)\ .$$

Bonus: Integrieren wir die gesamte Formel von α bis β, so erhalten wir (von rechts angefangen)

$$\int_\alpha^\beta (f'\circ g)(x)\cdot g'(x)dx \;=\; (f\circ g)(x)\Big|_\alpha^\beta \;=\; f(t)\Big|_{g(\alpha)}^{g(\beta)} \;=\; \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)dt\ . \tag{8.6}$$

Aufgabe 8.3:

(a) Berechnen Sie die Ableitungen von: (i) $(x+3)^{27}\cdot x^4$ (ii) $\ln(x^2+1)$ (iii) $\dfrac{x+1}{x^2+6}$ (iv) $\arctan(x)$

(b) Bestimmen Sie Stammfunktionen von: (i) $(x^3+2x+1)^{11}\cdot(3x^2+2)$ (ii) $x\ln(x)$ (iii) $\dfrac{2x+3}{x^2+1}$

Lösung:

(a) (i) Mittels Produkt- und Kettenregel sowie der Linearität erhalten wir

$$\Big((x{+}3)^{27}{\cdot}x^4\Big)' \;=\; \Big(27(x{+}3)^{26}{\cdot}(x{+}3)'\Big){\cdot}x^4 + (x{+}3)^{27}{\cdot}\Big(x^4\Big)' \;=\; (x{+}3)^{26}{\cdot}x^3{\cdot}(27x{+}4(x{+}3))$$

(ii) Da mittels Ableitungsregel für die Umkehrfunktion $\Big(f^{-1}\Big)'(y) \;=\; \dfrac{1}{(f'\circ f^{-1})(y)}$ sowie wegen $(\exp\circ\ln)(x) = x$ und $\exp'(x) = \exp(x)$ zunächst

$$\ln'(y) \;=\; \frac{1}{(\exp'\circ\ln)(y)} \;=\; \frac{1}{(\exp\circ\ln)(y)} \;=\; \frac{1}{y}$$

folgt, liefert nun die Kettenregel

$$\Big(\ln(x^2+1)\Big)' \;=\; \frac{1}{x^2+1}\cdot\Big(x^2+1\Big)' \;=\; \frac{2x}{x^2+1}\ .$$

(iii) Mittels Quotientenregel (8.3) erhalten wir

$$\left(\frac{x+1}{x^2+6}\right)' = \frac{(x+1)'\cdot(x^2+6) - (x+1)\cdot\big(x^2+6\big)'}{(x^2+6)^2} = \frac{(x^2+6)-2x(x+1)}{(x^2+6)^2} = \frac{6-2x-x^2}{(x^2+6)^2}$$

(iv) Mittels Quotientenregel (8.3) erhalten wir wegen $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ zunächst

$$\Big(\tan(x)\Big)' \;=\; \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \;=\; \frac{(cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(cos(x))^2} \;=\; 1 + (\tan(x))^2 \;.$$

Unter Verwendung von $(\tan \circ \arctan)(x) = x$ liefert wiederum die Ableitungsregel für die Umkehrfunktion $\Big(f^{-1}\Big)'(y) \;=\; \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$ hier

$$\Big(\arctan\Big)'(y) \;=\; \frac{1}{(\tan' \circ \arctan)(y)} \;=\; \frac{1}{1 + \big((\tan \circ \arctan)(y)\big)^2} \;=\; \frac{1}{1+y^2} \;.$$

(b) (i) Mit den speziellen Funktionen $g(x) = x^3 + 2x + 1$, $g'(x) = 3x^2 + 2$ sowie $f(y) = \dfrac{1}{12}y^{12}$, $f'(y) = y^{11}$ liefert die aus der Kettenregel (8.5) hergeleitete Substitutionsregel (8.6) nun hier

$$\int (x^3 + 2x + 1)^{11} \cdot (3x^2 + 2)dx \;\overset{\text{SR}}{=}\; \int y^{11}dy \;=\; \frac{1}{12}y^{12} \;\overset{\text{RS}}{=}\; \frac{1}{12}(x^3 + 2x + 1)^{12}$$

(ii) Mittels partieller Integration $\int u'v \;=\; uv - \int uv'$ für $u = \ln(x)$, $u' = \dfrac{1}{x}$ sowie $v = \dfrac{x^2}{2}$, $v' = x$ erhalten wir

$$\int x\ln(x)dx \;=\; \frac{x^2}{2}\ln(x) \;-\; \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \;=\; \frac{x^2}{2}\ln(x) \;-\; \frac{1}{4}x^2 \;.$$

(iii) Wegen $\dfrac{2x+3}{x^2+1} \;=\; \dfrac{2x}{x^2+1} \;+\; \dfrac{3}{x^2+1}$ sowie $(\ln \circ f)'(y) \;=\; \frac{f'(y)}{f(y)}$ und $\arctan'(x) \;=\; \dfrac{1}{1+x^2}$ (vergleiche (a)) folgt mit der Linearität sowie mittels aus der Kettenregel (8.5) hergeleiteten Substitutionsregel (8.6)

$$\int \frac{2x+3}{x^2+1} \;=\; \int \frac{2x}{x^2+1}dx \;+\; \int \frac{3}{x^2+1}dx \;=\; \ln(1+x^2) \;+\; 3\arctan(x) \;.$$