

Hinweise zur Lösung der 4. Serie

SS 06

1. **a)** Setze $M := \mathbb{Z} \cup \{\mathbb{Z}\}$ und für $a, b \in M$ setze $a <_M b :\leftrightarrow a, b \in \mathbb{Z}$ und $a <_{\mathbb{Z}} b$. Offensichtlich ist $\mathbb{Z}$ das einzige minimale Element in M .
b) Sei M linear geordnet. Falls $m \in M$ ein minimales Element ist, so ist m offensichtlich auch das kleinste (vollständige Ordnung).
Falls nun unter jedem Element noch ein minimales liegt (also " $\leq$ ") und es nur genau ein minimales m gibt, dann ist dieses m offensichtlich auch das kleinste.

2. **a)** Zu zeigen ist $X_y \setminus \{x_0\} \subseteq X'_y$.
Sei also $x_0 \neq x \in X_y$. Dann existiert ein $z \in X$ mit $z' = x$. Nun ist aber $x < y$, das heißt also es gibt ein $u \in X$ mit $x + u = y = z' + u = z + u'$. Also ist auch $z \in X_y$ und somit $x = z' \in X'_y$.
b) Sei $A \neq X$ ein Anfangsstück. Nun wird X durch " $\leq$ " wohlgeordnet, es gibt also ein minimales $y \in X \setminus A \neq \emptyset$. Behauptung $A = X_y$.
Beweis dazu:
Zuerst zeige man durch vollständige Induktion:
 $\forall x \in X$ gilt $y + x \notin A$ (*)
Nehmen wir uns nun ein $a \in A$. Falls $y \leq a$, so folgt aus (*) $a \notin A$. Also muss $a < y$ gelten und somit $a \in X_y$. Insgesamt also $A \subseteq X_y$.
Für ein $x \in X_y$ folgt aus der Minimalität von y sofort $x \in A$. Also $X_y \subseteq A$.

3. Für $x \in X$ setze $g_x : X \times X \rightarrow X$, definiert durch $(a, b) \mapsto bx$. Der Rekursionssatz liefert uns eine Abbildung $f_x : X \rightarrow X$ mit $f_x(x_0) = x'_0$ und $f_x(y') = g(y, f_x(y)) = f_x(y)x$. Wir definieren dann x^y als $f_x(y)$. Die Rechenregeln beweist man durch vollständige Induktion.
a) $x^y x^z = x^{y+z}$ Beweis durch Induktion über y . Die Aussage ist klar für $y = x_0$. Der Rest folgt aus $x^{y'} x^z = x^y x x^z = x^y x^z x = x^{y+z} x = x^{(y+z)'} = x^{y'+z}$.
b) Beweis von $x^z y^z = (xy)^z$ durch Induktion über z . Für $z = x_0$ ist alles klar. Dann folgt $x^{z'} y^{z'} = x^z x y^z y = x^z y^z x y = (xy)^z x y = (xy)^{z'}$.
c) Der Beweis von $(x^y)^z = x^{yz}$ läuft - wie kann es auch anders sein - wieder durch Induktion (über z). Für $z = x_0$ gibt es kein Problem. Den Rest sieht man dann wieder so: $(x^y)^{z'} = (x^y)^z x^y = x^{yz} x^y = x^{yz+y} = x^{yz'}$.

4. **a)** Andernfalls betrachte das kleinste Element $x \in X$ mit $f(x) < x$. Offensichtlich gilt dann auch $f(f(x)) < f(x) < x$ im Widerspruch zur Minimalität von x .
b) Sei $f : X \rightarrow X$ bijektiv mit $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Annahme: $f \neq id_X$. Sei $x \in X$ minimal mit $f(x) \neq x$. Dann gilt $x < f(x)$ (nach a)). Sei $f(y) = x$. Dann gilt auch $y < f(y)$ (sonst $y=f(y)=x$), also $y < x$ im Widerspruch zur Minimalität von x .
5. Man rechnet unmittelbar nach, dass folgende Abbildungen bijektiv sind!
 - a)** $\varphi : (A \times B)^C \rightarrow A^C \times B^C$ definiert durch $f \mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$, wobei $p_1 : A \times B \rightarrow A$ definiert ist durch $p_1(a, b) := a$ und analog p_2 .
 - b)** $\varphi : A^{B \cup C} \rightarrow A^B \times A^C$ definiert durch $f \mapsto (f|_B, f|_C)$.
 - c)** $\varphi : (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$ definiert durch $f \mapsto g$, wobei $g(b, c) := f(b)(c)$.
6. Zuerst zeigt man: f ist eine Abbildung. Setze dazu $T := \{x \in X \mid \exists! y \in Y \text{ mit } (x, y) \in f\}$. Falls außer x_0, y_0 auch noch x_0, y in f , so ist offenbar auch $f \setminus \{(x_0, y)\} \in \underline{G} \Rightarrow$ Widerspruch. Also $x_0 \in T$. Sei nun bekannt, dass $x \in T$. Also existiert **genau** ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in F$. Nehmen wir mal an, es gibt ein $Y \ni z \neq g(x, y)$ mit $(x', z) \in f$. Dann folgt aber wieder $f \setminus \{(x', z)\} \in \underline{G}$. Somit erhalten wir wieder einen Widerspruch. Es gilt also f ist eine Funktion. Da f auch die geforderten Eigenschaften hat, folgt unmittelbar aus der Definition. Die Eindeutigkeit beweist man ebenfalls durch Induktion.