

ÜA Grundlagen der Mathematik

SS 06

2. Serie

1. Zeige, unter der Annahme der Gültigkeit aller übrigen Körperaxiome die Gültigkeit des Distributivgesetzes für $\mathbb{R}$.
2. Sei K ein beliebiger vollständiger und archimedisch angeordneter Körper. Zeige es gibt einen Ordnungserhaltenden Isomorphismus zwischen K und dem in der Vorlesung konstruierten $\mathbb{R}$.
Anleitung: Informiere dich in einem Standard-Lehrbuch zur Analysis über die Axiomatische Einführung der reellen Zahlen. Alle diese Axiome wurden für "unser" $\mathbb{R}$ nachgewiesen. Insbesondere gilt, dass alle Folgerungen, die aus diesen gewonnen werden, auch für $\mathbb{R}$ gelten. Zum Beispiel enthält jeder diesen Axiomen genügende Körper einen dichten Unterkörper $\mathbb{Q}_K$, der zu den als bekannt vorausgesetzten rationalen Zahlen isomorph, ja sogar ordnungsisomorph ist. Zu K gehört also ein $\mathbb{Q}_K$ und ein Isomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}_K \rightarrow \mathbb{Q}$, der sogar ordnungserhaltend ist ($\mathbb{Q}$ bezeichne den zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ benutzten Körper der rationalen Zahlen). Zeige nun, dass durch $x \mapsto \{q \in \mathbb{Q} \mid \varphi^{-1}(q) < x\}$ ein Körperisomorphismus $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}$ definiert wird und dieser sogar ordnungserhaltend ist.
3. X, Y seien Mengen, $(A_i)_{i \in I}, (B_j)_{j \in J}$ Familien von Teilmengen von X bzw. Y , weiter sei $M \subseteq X, N \subseteq Y$ und $f : X \rightarrow Y$ sei eine Abbildung.
 - a) $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i$
 - b) $X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i$
 - c) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$
 - d) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$
 - e) $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$
 - f) $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$
 - g) $M \subseteq f^{-1}(f(M))$
 - h) $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$
 - i) $f^{-1}(Y \setminus N) = X \setminus f^{-1}(N)$

Zeige an den Stellen, an denen " $\subseteq$ " statt " $=$ " steht, dass die Inklusionen echt sein können.

Abgabetermin: 26.4.06 (vor der Vorlesung)