

ÜA Grundlagen der Mathematik

SS 06

3. Serie

1. Zeigen Sie, dass die Addition in $\mathbb{Q}$ wohldefiniert ist, dass $\mathbb{Q}$ archimedisch angeordnet ist und dicht in $\mathbb{R}$ liegt. (3 Punkte)
2. Führen Sie den Beweis von 2.8 zu Ende. (4 Punkte)
3. Zeigen Sie: Je zwei Peano-Strukturen $(X, x_0, ')$ und $(Y, y_0, *)$ sind isomorph, das heißt es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ mit $x'\varphi = (x\varphi)^*$. (2 Punkte) [Hinweis: Für ein solches φ gilt $x_0\varphi = y_0$. Warum?]
4. **a)** Sei $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer, endlicher Mengen. Für ein beliebiges $a \in S_{i+1}$ sei $\varphi(a)$ ein Element in S_i ($\forall i \in \mathbb{N}$). Dann existiert eine Folge von Elementen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\forall i \in \mathbb{N}$ gilt $a_i \in S_i$ und $\varphi(a_{i+1}) = a_i$. (3 Punkte)
b) Zeige, dass die Voraussetzung an die Endlichkeit der S_i (fast) nötig ist. Konstruiere also ein Gegenbeispiel, in dem die S_i unendlich sind. Inwieweit kann man die Voraussetzungen an die S_i dennoch abschwächen? (2 Punkte)
5. **Zusatzaufgabe**
a) Sei $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ ein Inhalt auf der Menge X , d.h. $\forall A \subseteq X$ gilt $f(A) \geq 0$, $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathcal{P}(X)$ und $f(X) = 1$. Definiere dann $\varphi_f := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid f(A) = 1\}$. Zeige nun:
(i) $\emptyset \notin \varphi_f$
(ii) falls $A, B \in \varphi_f \Rightarrow A \cap B \in \varphi_f$
(iii) falls $A \in \varphi_f$ und $A \subseteq B \Rightarrow B \in \varphi_f$
(iv) $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ gilt $A \in \varphi_f$ oder $X \setminus A \in \varphi_f$
Mengensysteme, welche die Eigenschaft (i), (ii), (iii) haben heißen Filter (auf X). Gilt zusätzlich die Eigenschaft (iv) so spricht man von einem Ultrafilter. (2 Punkte)
b) Sei φ ein Ultrafilter auf X . Beweise das es (genau) einen Inhalt $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ auf X gibt (im Sinne von a)) mit $\varphi = \varphi_f$. (2 Punkte)
c) Sei φ ein Ultrafilter und f der zugehörige Inhalt. Zeigen Sie: f ist ein Maß auf X (d.h. für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

aus $\mathcal{P}(X)$ gilt $f(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(A_n)$ genau dann, wenn für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus φ gilt: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. (2 Punkte)

Abgabetermin: 10.5.06 (vor der Vorlesung)