

ÜA Grundlagen der Mathematik

SS 06

4. Serie

1. **a)** Geben Sie ein Beispiel für eine geordnete Menge an, die genau ein minimales Element, aber kein kleinstes Element hat. 1 Punkt
b) Zeigen Sie dass, dies nicht passieren kann, wenn die Menge linear geordnet ist oder unterhalb eines jeden Elementes ein minimales Element liegt. 1 Punkt
2. Sei $(X, x_0, ')$ eine Peano-Struktur. Durch $x \leq y :\Leftrightarrow \exists z \in X$ mit $x + z = y$ wurde in der Vorlesung eine Ordnung auf X definiert. Für $y \in X$ sei $X_y := \{x \in X \mid x < y\}$. Zeige:
a) X_y ist ein Anfangstück von X . 1 Punkt
b) Jedes Anfangstück $A \neq X$ von X ist von der Form $A = X_y$ für ein gewisses $y \in X$. 1 Punkt
3. Sei wieder $(X, x_0, ')$ eine Peano-Struktur und $x, y, z \in X$. Gib eine sinnvolle (den bekannten Rechenregeln angepasste) Definition für x^y und beweise $x^y x^z = x^{y+z}$, $x^z y^z = (xy)^z$ und $(x^y)^z = x^{yz}$. 3 Punkte
4. **a)** Sei $\leq$ eine Wohlordnung auf einer beliebigen Menge X und $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung mit $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
Beweise: $\forall x \in X: x \leq f(x)$. 1 Punkt
b) Zeige $f = id_X$ ist die einzige bijektive Abbildung von X nach X mit $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. 2 Punkte
5. Seien X, Y beliebige Mengen. Dann steht $|X| = |Y|$ für: Es gibt eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Ferner bezeichne Y^X die Menge aller Abbildungen von X nach Y .
Im Folgenden seien A, B, C nichtleere Mengen. Beweise:
a) $|(A \times B)^C| = |A^C \times B^C|$ 2 Punkte
b) $B \cap C = \emptyset \Rightarrow |A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$ 2 Punkte
c) $|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|$ 2 Punkte

6. **Zusatzaufgabe** (Alternativ-Beweis des Rekursionssatzes)

Zur Erinnerung: Sei $(X, x_0, ')$ eine Peano-Struktur, Y eine Menge mit $y_0 \in Y$ und $g : X \times Y \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann existiert genau eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$ und $f(x') = g(x, f(x))$

Definiere $\underline{G} := \{H \subseteq X \times Y \mid (x_0, y_0) \in H \text{ und } \forall x, y ((x, y) \in H \Rightarrow (x', g(x, y)) \in H)\}$. Setze dann $f := \bigcap_{H \in \underline{G}} H$ und zeige f ist eine Funktion mit den gesuchten Eigenschaften. 3 Punkte

7. **Zusatzaufgabe** (Diese Aufgabe ist Teil einer Serie von Zusatzaufgaben, welche erst gegen Ende des Semesters abgegeben werden müssen. Der genaue Termin wird noch bekannt gegeben.)

Sei I eine nicht leere Menge, für $i \in I$ sei K_i ein Körper. $K := \prod_{i \in I} K_i$ wird durch $(k_i)_{i \in I} + (l_i)_{i \in I} := (k_i + l_i)_{i \in I}$ und $(k_i)_{i \in I} \cdot (l_i)_{i \in I} := (k_i \cdot l_i)_{i \in I}$ auf natürliche Weise zu einem Ring (falls nicht klar $\Rightarrow$ Übungsaufgabe 0 Punkte).

a) Für $(a_i)_{i \in I} = a \in K$ sei $\alpha(a) := \{i \in I \mid a_i = 0\}$ die Nullstellenmenge von a . Sei $A \subsetneq K$ ein Ideal. Zeige die Abbildung $A \mapsto \alpha(A)$ ist eine Bijektion zwischen der Menge aller echten Ideale von K und der Menge aller Filter auf I mit der Eigenschaft $A \subset B \Leftrightarrow \alpha(A) \subset \alpha(B)$ und A ist ein maximales Ideal $\Leftrightarrow \alpha(A)$ ist ein Ultrafilter. 4 Punkte

b) Sei φ ein Filter auf I und α das eindeutig zu φ gehörende Ideal. Beweise nun $K^* := K/\alpha$ ist genau dann ein Körper, wenn φ ein Ultrafilter ist. Zeige dazu allgemein:

Für ein Ideal α in einem kommutativen Ring $\mathcal{R}$ mit 1 sind äquivalent:

(i) $\mathcal{R}/\alpha$ ist ein Körper

(ii) α ist ein maximales Ideal

und verwende dann a). 4 Punkte

c) Was passiert mit K^* (bezüglich einem Ultrafilter) wenn I endlich ist? 1 Punkt

d) Für jedes $i \in I$ sei $\leq_i$ eine partielle (!) Ordnung auf K_i , welche die Add. und die Mult. respektiert (d.h. $x_i <_i y_i \Rightarrow x_i + z_i <_i y_i + z_i$ und $x_i <_i y_i \Rightarrow x_i z_i <_i y_i z_i$, falls $0 <_i z_i$).

Zeige auf K^* (bezüglich einem beliebigen Filter φ) kann man durch $(x_i)_{i \in I} + \alpha < (y_i)_{i \in I} + \alpha$ falls $\{i \in I \mid x_i <_i y_i\} \in \varphi$ eine partielle Ordnung $\leq$ definieren, welche die Add. und Mult. respektiert (α bezeichne das zu φ eindeutig bestimmte Ideal). Außerdem gilt: K^* wird durch $\leq$

total geordnet $\Leftrightarrow \varphi$ ist ein Ultrafilter und $\{i \in I \mid K_i \text{ wird durch } \leq_i \text{ total geordnet}\} \in \varphi$. 3 Punkte

e) Sei φ ein Ultrafilter. Finde ein notwendiges und hinreichendes Kriterium um mit Hilfe des Filter φ und der Körper K_i festzustellen welche Charakteristik K^* hat. 2 Punkte

f) $\mathbb{P}$ sei die Menge der Primzahlen und ψ ein Ultrafilter, der den Filter $\varphi := \{Q \subseteq \mathbb{P} \mid \mathbb{P} \setminus Q \text{ endlich}\}$ umfasst. Für $p \in \mathbb{P}$ sei $K_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Welche Charakteristik hat dann K^* ? 1 Punkt

Abgabetermin: 24.05.06 (vor der Vorlesung)