ÜA Grundlagen der Mathematik
SS 06

5. Serie

1. Benutzen Sie das Lemma von Zorn, um zu zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis hat.

2. **a)** In der Vorlesung wurde das geordnete Paar (a, b) definiert. Zeige: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ und $b = d$. 2 Punkte
   b) Finde eine andere Variante (a, b) zu definieren und beweise $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ und $b = d$. 2 Punkte

3. (**Satz von König**) $(M_i)_{i\in I}$, $(N_i)_{i\in I}$ seien zwei Familien von Mengen mit
   $\forall\ i \in I\ |M_i| < |N_i|$ (d.h. es gibt keine surjektive Abb. von M_i nach N_i).
   a) Zeige: $|\bigcup_{i\in I} M_i| < |\prod_{i\in I} N_i|$.
   Hinweis: Annahme $\exists\ f : \bigcup_{i\in I} M_i \to \prod_{i\in I} N_i$ surjektiv. Seien dann $p_j : \prod_{i\in I} N_i \to N_j$ für $j \in I$ die natürlichen Projektionen.
   Betrachte $x = (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in N_i \setminus p_i(f(M_i))$ ($\neq \emptyset$, warum?). 2 Punkte
   b) Folgere den Satz von Cantor: $|X| < |P(X)|$ für jede Menge X.
   1 Punkt

   Hinweis zur Notation in dritten Aufgabe: Hier treten unendliche Produkte von Mengen auf, welche in der Vorlesung nicht definiert wurden, dies wird hier nachgeholt:
   Eine Familie von Mengen $(X_i)_{i\in I}$ ist definiert als eine Abbildung
   $f : I \to \mathcal{P}(\bigcup_{i\in I} X_i)$, wobei $f(i) := X_i$.
   Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. $\prod_{i\in I} X_i := \{f \in (\bigcup_{i\in I} X_i)^I \mid \forall\, i \in I$ gilt $f(i) \in X_i\}$. Die natürlichen Projektionen $p_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ werden definiert durch $p_j(f) := f(j)$, für $f \in \prod_{i\in I} X_i$ und $j \in I$.

4. **a)**Übersätze die Ausdrücke $\exists^{\leq 2} x\, \psi(x, y)$ und $\exists^{=3} x\, \psi(x, y)$, wobei die Bedeutung von $\exists^{\leq 2}$ und $\exists^{=3}$ auf naheliegende Weise bestimmt sei, in Ausdrücke der mengentheoretischen Sprache. 2 Punkte
   b) Es bezeichne M die Menge aller Menschen, $s(x)$ das Prädikat x ist sterblich und $w(x)$ das Prädikat x ist Warmblüter. Schreibe als

Zeichenkette: Wenn alle Menschen sterblich sind und alle Menschen Warmblüter sind, dann gibt es keinen Menschen, der nicht sterblich oder nicht Warmblüter ist. Ist diese Aussage wahr? 1 Punkt
c) Drücke den Satz ohne Negation aus: Ich habe mich stets gegen die Absicht gewandt, die Gegner der Stimmungsmache gegen die Antialkohohlbewegung nicht mit den mir zur Verfügung stehenden Mitteln nicht zu unterdrücken! 1 Punkt

5. **Zusatzaufgabe** (**Zwei Fixpunktsätze**)
   Dazu sei M eine Menge und $g : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ eine monotone Abbildung (d.h. $A \subseteq B \Rightarrow g(A) \subseteq g(B)$), dann hat g einen $\subseteq$-minimalen/maximalen Fixpunkt.
   Hinweis: Setze $F := \{X \subseteq M \mid g(X) \subseteq X\}$ und $G := \{X \subseteq M \mid X \subseteq g(X)\}$ und verwende als mögliche Kandidaten mal $f_0 := \bigcap_{f \in F} f$ und $g_0 := \bigcup_{g \in G} g$. 3 Punkte

6. **Zusatzaufgabe** (**Satz von Schröder-Bernstein**)
   Seien M, N zwei Mengen und $f : M \to N$ injektiv und $g : N \to M$ injektiv. Definiere $F : P(M) \to P(M)$ durch $F(A) := M \setminus g(N \setminus f(A))$. Zeige F hat einen Fixpunkt A_0.
   Folgere $h : M \to N$ definiert durch $h(x) := f(x)$ falls $x \in A_0$ und $h(x) := g^{-1}(x)$ sonst, ist wohldefiniert 2 Punkte

Abgabetermin: 14.6. (vor der Vorlesung)