

ÜA Grundlagen der Mathematik

SS 06

6. Serie

1. Dreimal Zornsches Lemma:

- (a) Zeige die Äquivalenz der folgenden drei Maximalprinzipien (Ohne Verwendung des Auswahlaxioms!).

1) Lemma von Zorn

2) Hausdorff's Maximalkettensatz: Jede partiell geordnete Menge hat eine $\subseteq$ -maximale Kette.

3) Lemma von Teichmüller-Tuckey: Sei $T \neq \emptyset$ eine Menge mit $\forall x (x \in T \Leftrightarrow \forall y (y \subseteq x \wedge y: \text{endlich} \Rightarrow y \in T))$, dann existiert ein $\subseteq$ -maximales Element in T .

Hinweis: Zeige $1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$. 3 Punkte

- (b) 1) Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen. Zeige, dass es eine Bijektion $f : X \rightarrow X$ gibt, welche keine Fixpunkte hat.

2) Wenn X unendlich ist, dann gilt $|Sym(X)| = |\mathcal{P}(X)|$, wobei $Sym(X) := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$ und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge darstellt.

- (c) Beweise das folgende Zerlegungslemma:

Sei X eine nichtleere Menge und $f : X \rightarrow X$ eine beliebige Abbildung. Dann gibt es eine Zerlegung $X = F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$ von X in paarweise disjunkte Mengen, wobei $F = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ und zusätzlich $X_i \cap f(X_i) = \emptyset$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

Hinweis: Betrachte die Menge

$\mathcal{J} : \{(X_1, X_2, X_3) \in \mathcal{P}(X)^3 \mid X_i \cap X_j = \emptyset \text{ und } f(X_j) \subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^3 X_i\}$

mit der partiellen Ordnung definiert durch $(X_1, X_2, X_3) \leq (X'_1, X'_2, X'_3) \Leftrightarrow X_i \subseteq X'_i$ für $i = 1, 2, 3$ und beachte die Bemerkungen aus der letzten Übung.

2. Mächtigkeiten:

a) Sei X eine unendliche Menge,
 Ω eine Menge von Mengen mit $|\Omega| \leq |X|$ und $\forall \omega \in \Omega$ gilt $|\omega| \leq |X|$,
 $N^M := \{f : M \rightarrow N \mid f: \text{Funktion}\}$
für irgendwelche Mengen M bzw. N ,
 $\Gamma := \{\gamma \subseteq P(X) \setminus \{\emptyset\} \mid X = \bigcup \gamma \text{ und } \forall g_1, g_2 \in \gamma \text{ gilt } (g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1 \cap g_2 = \emptyset)\}$ (die Menge aller Zerlegungen von X),
 $\underline{E}(X) := \{A \subset X \mid A: \text{endlich}\}$ und $E_X(X) := \{A \subseteq X \mid |A| = |X|\}$.
Zeige dann:

- 1) $|\bigcup \Omega| \leq |X|$ 1 Punkt
- 2) $|X| = |X^n| = |\underline{E}(X)|$ 2 Punkte
- 3) $|\Gamma| = |P(X)| = |\{0, 1\}^X| = |X^X| = |E_X(X)|$ 4 Punkte

b) Sei M eine unendliche Menge und $|N| \leq |M|$.
Dann gilt: $|\mathcal{P}(M)^N| = |\mathcal{P}(M)|$ 2 Punkte

3. Anwendungen in der Linearen Algebra:

- (a) Sei V ein Vektorraum. Es wurde bereits gezeigt, dass jeder Vektorraum eine Basis hat. Ähnlich zeigt man dass Jedes Erzeugendensystem eine Basis enthält bzw. jede linear unabhängige Menge zu einer Basis erweitert werden kann. **Zeige nun:** Alle Basen sind gleichmächtig; also ist die Definition $\dim_K(V) := |B|$, wobei B eine Basis von V ist, sinnvoll. 3 Punkte
- (b) Sei V ein unendlicher K -Vektorraum, B eine Basis von V . Dann gilt: $|V| = |K \times B| = \max\{|K|, |B|\}$. (Hinweis: $K^* := K \setminus \{0\}$, zeige $|K \times B| = |K^* \times B|$, verwende dann $f : K^* \times B \rightarrow V$ definiert durch $(k, b) \mapsto kb$ und $g : \underline{E}(K \times B) \rightarrow V$ definiert durch $A \mapsto \sum_{(k,b) \in A} kb$. Ein ähnlicher Trick funktioniert übrigens auch in a)) 1 Punkt
- (c) Sei K ein Körper. K^N ($N = \{0, 1, 2, \dots\}$) wird durch $(k_n)_{n \in N} + (l_n)_{n \in N} := (k_n + l_n)_{n \in N}$ und $a(k_n)_{n \in N} := (ak_n)_{n \in N}$ auf natürliche Weise zu einem Vektorraum. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschiedene Elemente aus K . Zeige: $g_1, \dots, g_n \in K^N$ sind linear unabhängig, wobei $(g_i)_j := \lambda_i^j$ mit $i = 1, \dots, n$ und $j \in N$, also $g_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots)$. 1 Punkt

- (d) (**Satz von Erdős-Kaplansky**) Sei K ein Körper und I eine unendliche Menge. Dann ist $\dim_K(K^I) = |K^I|$.

Hinweis: Nach Aufgabe b) genügt es zu zeigen $|K| \leq \dim_K(K^I)$ (Warum?). Sei dann $\sigma : N \rightarrow I$ injektiv und g_a für $a \in K$ das I -Tupel mit $(g_a)_{\sigma(n)} = a^n$ für $n \in N$ und $(g_a)_i = 0$ für $i \in I \setminus \sigma(N)$. Dann ist $\{g_a \mid a \in K\}$ linear unabhängig.) 3 Punkt

Folgere: Sei U ein unendlichdimensionaler K -Vektorraum, dann gilt: $U \not\cong U^*$. (Hinweis: Zeige $U^* = \text{Hom}(U, K) \cong K^B$, wobei B : Basis von U .) 1 Punkt

Abgabetermin: 28.06. (vor der Vorlesung)