ÜA Lineare Algebra WS 04/05

1. Serie

1. (a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
   Für alle reellen Zahlen h mit $h \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ gilt:
   $$(1+h)^n > 1 + nh,$$
   für $n \geq 2$.

   (b) Für die Zahlenfolge (f_n) sei folgende implizite Bildungsvorschrift gegeben:
   $$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = \frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1}.$$
   Geben Sie die explizite Bildungsvorschrift an und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

2. Für Aussagen A und B sei $A \mid B$ definiert als $\neg(A \wedge B)$. Stellen Sie die Aussagen $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ mittels der Aussagenverknüpfung $\mid$ (und nur dieser) dar.

3. Es seien A, B, C Aussagen. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen stets wahr sind:

   (a) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

   (b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

   (c) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

   (d) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

4. Es seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie folgende Rechenregeln:

   (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

   (b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

   (c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

5. Seien A_1, A_2, B_1, B_2 Mengen. Beweisen Sie:
   $$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$$
   und geben Sie ein Beispiel an, für das in obiger Beziehung $\neq$ steht.

Abgabetermin: 20.10.04 (vor der Vorlesung)