

ÜA Lineare Algebra WS 04/05

3. Serie

1. Konstruieren Sie auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ Relationen R_1, R_2, R_3 für die folgendes gilt:
 - (a) R_1 ist reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch.
 - (b) R_2 ist reflexiv, symmetrisch, aber nicht transitiv.
 - (c) R_3 ist symmetrisch, transitiv, aber nicht reflexiv.
2. Es bezeichne $Q_{10}(n)$ die Quersumme der Dezimaldarstellung der natürlichen Zahl n . Es sei ferner M eine beliebige nichtleere Menge von natürlichen Zahlen. Mit R_M werde die folgende Relation auf M bezeichnet:

$$(x, y) \in R_M :\Leftrightarrow x, y \in M \wedge Q_{10}(x) = Q_{10}(y).$$

- (a) Zeigen Sie: R_M ist für jedes $\emptyset \subset M \subseteq \mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation auf M .
 - (b) Geben Sie eine unendliche Menge M an, bei der die Anzahl der Klassen der Zerlegung endlich ist (Zerlegung angeben).
 - (c) Geben Sie eine unendliche Menge M an, bei der alle Klassen endlich sind (Zerlegung angeben).
3. Sei $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Zeigen Sie:
 - (a) Jede Permutation der Menge M lässt sich als Produkt der Transpositionen $(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (1, n)$ schreiben.
 - (b) Jede Permutation der Menge M lässt sich als Produkt der Transpositionen $(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots, (n-1, n)$ schreiben.(In (a) und (b) dürfen Faktoren mehr als einmal im Produkt auftreten).
Notation: Für verschiedene $i, j \in M$ bezeichnet (i, j) diejenige Permutation, welche die Elemente i und j vertauscht und alle anderen Elemente fixiert.
4. Geben Sie alle Untergruppen der S_3 an.

5. (a) Zeigen Sie, dass die Nacheinanderausführung von Gruppenhomomorphismen wieder ein Gruppenhomomorphismus ist.
- (b) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen der Gruppe der reellen Zahlen mit der Addition $(\mathbb{R}, +)$ und der Gruppe der positiven reellen Zahlen mit der Multiplikation $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ an.

Abgabetermin: 3.11.04 (vor der Vorlesung)