

ÜA Lineare Algebra WS 04/05

4. Serie

1. Zeigen Sie:

- (a) Die Menge $\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, 2 \text{ teilt nicht } b\}$ bildet bzgl. der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring mit Eins, aber keinen Körper.
- (b) Die Menge $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ bildet bzgl. der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen Körper.

2. Sei n eine natürliche Zahl. Auf der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen wird folgende Relation $\equiv \pmod{n}$ definiert:

$$a \equiv b \pmod{n} \text{ genau dann, wenn } n \mid (b - a).$$

Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ bezeichne \bar{a} diejenige Äquivalenzklasse bzgl. \equiv , welche a enthält. Auf der Menge \mathbb{Z}_n aller Äquivalenzklassen bzgl. \equiv werden die beiden Operationen “+” und “·” definiert durch

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b} \text{ und } \bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass dies tatsächlich Definitionen sind (dass also die rechten Seiten unabhängig von der Wahl der Vertreter a und b sind).
 - (b) Zeigen Sie, dass mit diesen Operationen \mathbb{Z}_n ein endlicher kommutativer Ring mit Eins ist.
 - (c) Beweisen Sie, dass \mathbb{Z}_n genau dann ein Körper ist, wenn n eine Primzahl ist.
3. Sei K ein Körper. Die Abbildungen $f_{a,b} : K \rightarrow K$ definiert durch $f_{a,b}(x) = ax + b$ ($a, b \in K, a \neq 0$) bilden bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe.
4. Sei G eine Gruppe und g ein beliebiges, aber festes Element aus G . Weisen Sie nach, dass $\varphi : G \rightarrow G$ mit $\varphi(x) = g^{-1}xg$ ein Isomorphismus ist.

5. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des \mathbb{R}^2 ?

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

(c) $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$

(d) $a, b \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{R}^*$ beliebig aber fest $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 4\}$

(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^2 = 0\}$

Abgabetermin: 10.11.04 (vor der Vorlesung)