

ÜA Lineare Algebra WS 04/05

6. Serie

1. Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ sind die Vektoren $u_1 = (1, -2, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, -1)$, $u_3 = (0, 1, -2, 0)$, $u_4 = (0, 3, 1, 0)$ gegeben.
 - (a) Zeigen Sie dass die Menge $E = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ ist.
 - (b) Ergänzen Sie die linear unabhängige Menge $L = \{(1, -1, 1, -1), (0, 2, 3, 0)\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$, indem Sie Elemente aus E hinzufügen. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?
2. Sei U_1 bzw. U_2 der von $\{(4, -3, 2, 0), (7, 0, 5, 3)\}$ bzw. $\{(2, -5, 3, 1), (5, -2, 6, 4), (7, -7, 9, 5)\}$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.
3. Zeigen Sie, dass im Vektorraum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ über dem Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ $\{\log(2), \log(3), \log(5)\}$ linear unabhängig ist.
4. Im Vektorraum V über $\mathbb{R}$ sei $M = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ eine Menge von linear unabhängigen Vektoren und

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Weisen Sie nach, dass die Menge $N = \{u_1 - u, u_2 - u, \dots, u_n - u\}$ genau dann linear abhängig ist, wenn

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

5.
 - (a) Sei V ein Vektorraum mit $\dim V \geq 2$. Zeigen Sie, dass V mehr als eine Basis besitzt.
 - (b) Sei V ein Vektorraum mit $\dim V = 1$. Geben Sie alle Basen von V an.

Abgabetermin: 24.11.04 (vor der Vorlesung)