

ÜA Lineare Algebra WS 04/05

7. Serie

1. (a) Es sei φ ein Isomorphismus des Vektorraums V auf den Vektorraum W . Zeigen Sie, dass φ^{-1} ein Isomorphismus von W auf V ist.
(b) Zeigen Sie, dass für alle linearen Abbildungen α, β, γ , wobei α, β lineare Abbildungen des Vektorraums U in den Vektorraum V und γ eine lineare Abbildung von V in W ist, gilt: $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$.
(c) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Geben Sie zwei Endomorphismen α und β an, die nicht kommutieren.
2. Sei V ein Vektorraum der Dimension n . Zeigen Sie: Zu jedem $m \leq n$ existiert ein Unterraum $U \leq V$, dessen Dimension m ist.
3. Sei U_1 bzw. U_2 der von

$$\{(-2, 5, -2, 0, 3), (-3, 6, -5, 5, 6), (-1, 7, -2, 4, 6)\}$$

bzw. von

$$\{(0, -1, -5, 0, -2), (2, 1, -3, 2, 0), (1, 1, -1, 2, 1), \}$$

erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $U_1 \cap U_2$, $U_1 + U_2$ und $(U_1 + U_2)/(U_1 \cap U_2)$.

4. Gegeben sei die Abbildung: $\varphi : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}^2$ mit $\varphi(p(x)) = (p(0), p(1))$.
(a) Zeigen sie, dass φ eine lineare Abbildung ist.
(b) Geben sie eine Basis des Kerns der linearen Abbildung an. Ist die Abbildung surjektiv?

Abgabetermin: 01.12.04 (vor der Vorlesung)