# ÜA Lineare Algebra WS 04/05

**9. Serie**

1. Es sei $V$ ein Vektorraum der Dimension $n$, und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^*$. Zeigen Sie:

   (a) $\dim(\cap_{i=1}^m \mathrm{Ker}(\alpha_i)) \geq n - m$

   (b) Es gilt $\dim(\cap_{i=1}^m \mathrm{Ker}(\alpha_i)) = n - m$ genau dann, wenn $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ linear unabhängig ist.

2. Bestimmen Sie die $n$–ten Potenzen der folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \text{ eine } n \times n\text{–Matrix.}$$

3. Sei $\alpha$ der Endomorphismus des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\alpha(x, y, z) = (5x + y - 2z, -x + 3y + 2z, -x + y + 4z)$$

   Bestimmen Sie die Matrix von $\alpha$

   (a) bzgl. der Standardbasis und

   (b) bzgl. der Basis $\{(0, 1, -1), (1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$.

4. Sei $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ eine Basis von $V$. $\alpha$ und $\beta$ seien die linearen Fortsetzungen von

$$\alpha(b_i) = \begin{cases} b_{i+1} & i < n \\ 0 & i = n \end{cases}$$

   und

$$\beta(b_i) = \begin{cases} (i-1)b_{i-1} & i > 1 \\ 0 & i = 1 \end{cases}.$$

   Berechnen Sie die Matrix von $\beta \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta$ bzgl. der Basis $B$.

5. Sei $V$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$. Für jedes $v$ aus $V$ sei eine Abbildung $f_v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_v(w) = \int_{-1}^{1} vwdx$.
Zeigen Sie:

   (a) $f_v$ ist ein Element von $V^*$.

   (b) Sei $\varphi(v) = f_v \forall v \in V$. Dann ist $\varphi$ eine lineare Abbildung von $V$ in $V^*$.

   (c) Sei $U_4$ der Unterraum von $V$ der alle Polynome vom Grad kleiner als 4 enthält und sei $f_p : U_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle Polynome aus $U_4$ wie oben definiert. $\varphi(p) = f_p$ für alle $p \in U_4$. Geben Sie die Abbildungsmatrix von $\varphi : U_4 \longrightarrow U_4^*$ bezüglich der Standardbasis von $U_4$ und der dualen Basis von $U_4^*$ an.

Abgabetermin: 15.12.04 (vor der Vorlesung)