

ÜA Lineare Algebra WS 04/05

13. Serie

1. Beschreiben Sie den Schnitt des Kegels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ mit der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 6\}$.
2. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Eine Abbildung $\alpha : V \rightarrow V$ (nicht notwendig linear!) heißt *Bewegung* von V , falls

$$|u - v| = |\alpha(u) - \alpha(v)|$$

für alle $u, v \in V$ gilt. Beweisen Sie:

Eine Abbildung $\alpha : V \rightarrow V$ ist genau dann eine Bewegung, wenn es ein $t \in V$ und eine orthogonale Abbildung $\beta : V \rightarrow V$ gibt mit $\alpha(v) = \beta(v) + t$ für $v \in V$.

3. Matrizen beschreiben einerseits lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen (7.6 im Vorlesungsskript) und andererseits Bilinearformen (10.5(iii) u. (iv) im Skript). Es sollte daher einen Zusammenhang zwischen den Objekten “lineare Abbildung” und “Bilinearform” geben (siehe auch den Beweis von 10.8 im Skript):
Es sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Für $v \in V$ betrachten wir die Abbildung $\beta_v : V \rightarrow \mathbb{K}$, $w \mapsto \beta(w, v)$.

- (a) β_v ist linear, also $\beta_v \in V^*$.
- (b) Die Abbildung $\tilde{\beta} : V \rightarrow V^*$, $v \mapsto \beta_v$, ist linear.
- (c) Die Abbildung $\beta \mapsto \tilde{\beta}$ ist ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraum aller Bilinearformen von V und dem Raum $\text{Hom}(V, V^*)$.
- (d) Sei B eine Basis von V und B^* die zu B duale Basis von V^* . Dann ist die Gram'sche Matrix von β bzgl. B gleich der Abbildungsmatrix von $\tilde{\beta}$ bzgl. B und B^* .
- (e) Genau dann ist β nicht ausgeartet, wenn $\tilde{\beta}$ ein Isomorphismus ist.

Abgabetermin: 15.04.05 (vor der Vorlesung)