

ÜA Lineare Algebra 04/05

16. Serie

1. Bestimmen Sie unter den Flächen 2. Ordnung diejenigen, die wenigstens eine Gerade enthalten.
2. Weisen Sie nach, dass
 $I = \{p(x)(x^3 + x^2 - 2x) + h(x)(x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 2x - 4) \mid p(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]\}$
ein Ideal in $\mathbb{R}[x]$ ist. Geben Sie ein erzeugendes Element dieses Ideals an.
3. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und a ein nilpotentes Element, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$. Zeigen Sie, dass $1 - a$ eine Einheit in R ist.
4. Ein Ring $(B, +, \cdot)$ mit Einselement heißt Boolescher Ring, wenn für alle Elemente $a \neq 0$ aus B gilt $a \cdot a = a$ (solche Elemente heißen Idempotent). Zeigen Sie:
 - (a) $\forall a \in B : a + a = 0$,
 - (b) $\forall a, b \in B : a \cdot b = b \cdot a$.
5. Sei R die Menge der oberen Dreiecksmatrizen vom Typ (3,3) über $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Mengen sind Ideale, Rechtsideale oder Linksideale von R ?

$$(a) \quad M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(b) \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(c) \quad M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(d) \quad M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} s & t & r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Abgabetermin: 06.05.05