

ÜA Lineare Algebra 04/05

17. Serie

1. Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a = 252, b = 462$ und $c = 693$. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler t von a, b und c ($t = \text{ggT}(a, b, c)$). Geben Sie ganze Zahlen x, y, z an, so dass $xa + yb + zc = t$ gilt.
2. Es sei $R = \mathbb{R}[x]$ der Polynomring. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $t = \text{ggT}(p_1, p_2)$ der Polynome $p_1 = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ und $p_2 = x^3 - x^2 - x + 2$ und geben Sie Polynome u und v an, mit $up_1 + vp_2 = t$.
3. Zerlegen Sie das Polynom $p(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 2$ über $\mathbb{Q}$ in seine irreduziblen Bestandteile.
4. Zeigen Sie, dass $x^2 + 1$ in $\mathbb{R}[x]$ prim ist, aber nicht in $\mathbb{C}[x]$.
5. Sei $R = \{a + b\sqrt{5}i \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.
 - (a) Bestimmen Sie die Einheiten in R .
 - (b) Zeigen Sie, dass die Elemente $2, 3, 1 + \sqrt{5}i$ und $1 - \sqrt{5}i$ alle irreduzibel, aber nicht prim in R sind.
 - (c) Zeigen Sie, dass $I = (2, 1 + \sqrt{5}i)$ ein echtes Ideal von R ist, aber kein Hauptideal.

(Hinweis: Nutzen Sie $N(a + b\sqrt{5}i) := a^2 + 5b^2$.)

Abgabetermin: 13.05.05