

Durch die Matrix A sei ein Endomorphismus des $\mathbb{Q}^8$ gegeben. Bestimmen Sie die kanonische rationale Form R der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie eine Transformationsmatrix T mit $T^{-1}AT = R$.

(Hinweis: Die irreduziblen Faktoren des charakteristischen Polynoms sind: $x - 1$ und $x^2 - 2$.)

Lösung:

Wir bestimmen die Ränge von $(A - E)^k$:

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -4 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $rg(A - E) = 7$

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 8 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 7 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $rg(A - E)^2 = 6 = rg(A - E)^3$.

Damit liefert die Formel $z = \frac{1}{degp} [Rg(p^{k-1} + Rg(p^{k+1} - 2Rgp^k)]$ zur Berechnung

der kanonisch rationalen Form, das ein Kästchen der Größe 2×2 existiert. Die Basisvektoren erhält man, indem man einen Vektor aus dem Kern von

$$(A - E)^2 \text{ wählt, der nicht Eigenvektor ist. Z.B. } b_1 = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dann ist}$$

$$b_2 = Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den anderen irreduziblen Faktor ergibt sich:

$$(A^2 - 2E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und $rg(A^2 - 2E) = 4$

$$(A^2 - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

und $rg(A^2 - 2E)^2 = 2 = rg(A^2 - 2E)^3$, und damit erhält man nach der obigen Formel, das ein Kästchen die Größe 2×2 und eines die Größe 4×4 hat. Als Basiselement für das erste Kästchen wählen wir einen Vektor aus

$$ker(A^2 - 2E) \text{ z. B. } b_3 = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dann ist } b_4 = Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Für den anderen}$$

$$\text{Block wählen wir ein Element aus } ker(A^2 - 2E)^2 \text{ z. B. } b_5 = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{dann ist } b_6 = Av = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_7 = A^2v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_8 = A^3v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Die}$$

Transformationsmatrix enthält in den Spalten dann die Vektoren $b_1, b_2, \dots, b_8$ und die kanonisch rationale Form ist:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die Matrix A (Serie 20) sei ein Endomorphismus des $\mathbb{R}^8$ gegeben.
Bestimmen Sie die Jordansche Normalform J der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie eine Transformationsmatrix T mit $T^{-1}AT = J$.

Lösung: Siehe oben. Die kanonisch rationale Form R von A ist:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix besteht aus den Vektoren $b_1, b_2, \dots, b_8$ mit:

$$b_1 = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dann ist } b_2 = Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$b_3 = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dann ist } b_4 = Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_5 = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dann ist } b_6 = Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_7 = A^2 v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_8 = A^3 v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Um die Jordansche Normal-}$$

form J zu bestimmen transformieren wir jetzt R und bestimmen die Transformationsmatrix S . Insgesamt erhält man dann: $A = S^{-1}T^{-1}ATS = J$. Dazu betrachten wir zuerst die beiden letzten Kästchen von R . Zu den Eigen-

$$\text{werten } \pm\sqrt{2} \text{ erhält man die Eigenräume: } \ker A - \sqrt{2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \\ -2 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{und } \ker A + \sqrt{2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \\ -2 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ Dann liegt im Kern von } (A - \sqrt{2})^2$$

$$\text{noch zusätzlich der Basisvektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und im Kern von } (A + \sqrt{2})^2 \text{ der}$$

$$\text{Vektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Wir w\u00e4hlen als Basisvektor } b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dann ist } b_6 =$$

$$(A - \sqrt{2})b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \\ -2 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ der Basisvektor } b_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dann ist } b_8 =$$

$$(A + \sqrt{2})b_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \\ -2 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ die Basisvektoren } b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind dann die anderen Eigenvektoren. Damit ist S die Matrix, die in den ersten beiden Spalten die Vektoren zur Transformation des ersten K\u00e4stchen

$$\text{enth\u00e4lt. Dies ist der erste Einheitsvektor } b_1 \text{ und f\u00fcr } b_2 = (A - 1)b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und dann $b_3, \dots, b_8$ stehen hat. Es ist $S^{-1}RS = J$ mit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Durch

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sei die Jordansche Normalform eines Endomorphismus des $\mathbb{R}^8$ gegeben. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von B^2 .

Lösung:

Wir betrachten die beiden Kästchen von B^2 einzeln, dann ist $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Diese Matrix hat den Eigenwert 0 vierfach und da $rg K_1 = 2$ und $rg K_1^2 = 0$. Damit enthält die Jordanform von K_1 2 Kästchen der Größe 2.

Für das andere Kästchen erhalten wir $K_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Damit ist 4 vier-

facher Eigenwert und $rg(K_2 - 4) = 3, rg(K_2 - 4)^2 = 2, rg(K_2 - 4)^3 = 1$ ist hat die Jordanform ein Kästchen der Größe 4. Die Jordansche Normalform

von B^2 ist dann:

$$J(B^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$