

ÜA Lineare Algebra WS 06/07

1. Serie

1. Man drücke die folgenden mathematischen Sätze mit Hilfe der Zeichen $\forall, \exists, \exists!, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$ und bekannten weiteren mathematischen Symbolen aus:

- (a) Jede ganze Zahl ist gerade oder ungerade.
- (b) Nicht alle Primzahlen sind ungerade.
- (c) Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat kein größtes Element.
- (d) Zu jeder natürlichen Zahl a und jeder natürlichen Zahl b gibt es eine natürliche Zahl x mit $a + x = b$.

Negieren Sie die Aussagen 1c) und 1d).

2. Es seien A, B, C Aussagen. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen stets wahr sind:

- (a) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- (b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$
- (c) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- (d) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

3. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

- (a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- (b) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $6 \mid n^3 - n$ (d.h. 6 teilt $n^3 - n$).

4. Es seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie folgende Rechenregeln:

- (a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- (b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- (c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Abgabetermin: 27.10.06, vor der Vorlesung