

ÜA Lineare Algebra WS 06/07

4. Serie

1. Stellen Sie die folgenden Permutationen der S_8 in der Zykelschreibweise dar, bestimmen Sie die Inversen von

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 5 & 4 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 4 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

und beschreiben Sie die Permutation durch Produkte von Transpositionen.

2. Sei $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Zeigen Sie:

- (a) Jede Permutation der Menge M lässt sich als Produkt der Transpositionen $(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (1, n)$ schreiben.
- (b) Jede Permutation der Menge M lässt sich als Produkt der Transpositionen $(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots, (n-1, n)$ schreiben.

(In (a), und (b) dürfen Faktoren mehr als einmal im Produkt auftreten).

3. Man zeige, die Menge aller Paare $M = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0\}$ ist eine Gruppe bezüglich der Operation

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

4. (a) Zeigen Sie, dass $R = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 2 \text{ teilt nicht } b\} \subseteq \mathbb{Q}$ bzgl. der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring mit Eins, aber kein Körper ist. Welche Elemente aus R haben ein Inverses.
- (b) Zeigen Sie, dass $K = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ bzgl. der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ein Körper ist.
5. Sei M eine beliebige Menge und $B = \mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M . Zeigen Sie, dass B mit der Operationen symmetrische Differenz $\dot{+}$ eine kommutative Gruppe ist.

Abgabetermin: 17.11.06 (vor der Vorlesung)