

ÜA Lineare Algebra SS 07

16. Serie

1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die folgendermaßen definierte lineare Abbildung:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ -6y+12z \\ -2x+2y-2z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $A_{B,C}$ von f bezüglich der Basen

- (a) $B = C = \text{Standardbasis}$,
(b) $B = C = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$
2. Sei f der Endomorphismus (lineare Abbildung von V in sich) des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$, welcher bzgl. der Basis $\{(1, 2, 4), (2, 3, 1), (3, 4, 2)\}$ die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -16 & -30 & -44 \\ 12 & 23 & 34 \end{pmatrix}$$

hat. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Welchen Rang hat f ?

3. Sei $V = \mathbb{R}^4$ und $W = \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Basen des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$, die durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen in V und W definiert ist. Ist f injektiv und surjektiv? Ist $(1, 2, 3)^T$ Element des Bildes von f ? Wenn ja, ermittle man die Menge aller Urbilder.

4. Sei $V = K^{3 \times 3}$ der Vektorraum aller 3×3 -Matrizen über einem Körper K . Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V \rightarrow K$, die durch

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := a_{11} + a_{12} + a_{13}$$

definiert ist, eine lineare Abbildung ist. Geben Sie eine Basis von $\ker f$ an.

Abgabetermin: 24.05.07 (vor der Vorlesung)