

Lineare Algebra und Geometrie 05/06

3. Testat, 10.07.2006

1. Welche der folgenden Abbildungen $\alpha : V \rightarrow W$ sind linear? (Nachweis oder Gegenbeispiel)

- (a) $V = W = \mathbb{R}^3$, $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_1)$,
- (b) $V = W = \mathbb{R}^4$, $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2^2, x_3^3, x_4^4)$,

(4P.)

2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die folgendermaßen definierte lineare Abbildung:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ -6y+12z \\ -2x+2y-2z \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen A von f bezüglich der Standardbasis.
- (b) Geben Sie eine Basis des Kerns und des Bildes von f an.
- (c) Ist die Abbildung injektiv bzw. surjektiv?

(10P.)

3. (a) Bestimmen Sie die Determinante von A_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die inverse Matrix zu A_2 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(je 4P.)

4. Geben Sie an, für welche $t \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Geben Sie in diesem Fall die Lösung mit der Cramerschen Regel an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & t+1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t^2 & t \end{array} \right)$$

(8P.)

5. Entscheiden Sie für die folgende reelle Matrix, ob sie diagonalisierbar ist. Wenn ja, geben Sie die Transformationsmatrix an.

$$\begin{pmatrix} -5 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 14 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

(8P.)

6. Gegeben sei eine Affinität der Ebene durch

$$f(1, 1) = (2, 4); f(1, 0) = (0, -3) \text{ und } f(0, 1) = (2, 7).$$

Geben Sie die allgemeine Abbildungsgleichung der Affinität an und untersuchen Sie diese auf Fixpunkte.

(6P.)