17 Algorithmus von de Casteljau

Ziel (u.a.):

Approximation von polynomialen Kurven (in Bézier–Darstellung; siehe Definition 1) durch Polygonzüge.

Diese Problemstellung kommt aus den Bereichen

CAD: computer aided design = rechnergestütztes Konstruieren

CAGD: computer aided geometric design

Im Folgenden: Meist $d \in \{2, 3\}$.
($\mathbb{R}^d$ statt $\mathbb{R}^n$, da n für andere Zwecke gebraucht wird: $B_i^{(n)}(t), b^{(n)}, \ldots$)

Definition 1

Sind $b^{(0)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(n)} \in \mathbb{R}^d$ gegeben, so beschreibt das vektorwertige Polynom (in Bézier-Darstellung bzgl. $[0,1]$)

$$P(t) := \sum_{i=0}^{n} b^{(i)} \underbrace{B_i^{(n)}(t)}_{=\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}} , \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

in $\mathbb{R}^d$ eine polynomiale Kurve, die man für $t \in [0,1]$ Bézier-Kurve nennt; $b^{(0)}, \ldots, b^{(n)}$ heißen Kontroll– oder Bézier–Punkte. Verbindet man $b^{(i)}$ mit $b^{(i+1)}$ geradlinig für $i = 0, 1, \ldots, n-1$, so entsteht ein Streckenzug, den man Bézier–Polygonzug nennt.

Ziel: Berechnung eines Funktionswertes $P(t)$ und Steuerung der Gestalt von $P(t)$ unter alleiniger Verwendung der Kontrollpunkte.

Bemerkung 1

a) Man kann in Definition 1 allgemeiner Bernstein–Polynome bzgl. des Inter–valls $[a, b]$ verwenden. Wegen Bemerkung 15.1 beschränken wir uns hier jedoch auf $[a, b] = [0, 1]$.

b) Jede durch

$$P(t) := \sum_{i=0}^{n} a^{(i)} t^i , \quad a^{(i)} \in \mathbb{R}^d$$

gegebene Kurve heißt polynomiale Kurve in $\mathbb{R}^d$.

c) In (1) kann man t als Parameter auffassen.

d) Im Fall $d = 2$ (ebene Kurve) und $b^{(i)} = \begin{pmatrix} b_x^{(i)} \\ b_y^{(i)} \end{pmatrix}$, gilt

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n} b_x^{(i)} \cdot B_i^{(n)}(t) \\ \sum\limits_{i=0}^{n} b_y^{(i)} \cdot B_i^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Beispiel 1 (Polynomiale Kurven allgemein; $t \in \mathbb{R}$)

a)
$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 \tag{2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad y = x^2 \qquad \text{(Parabel)}$$

b)
$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} t^2 + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ a_n \end{pmatrix} t^n, \quad a_i \in \mathbb{R}\,,\ a_n \neq 0$$

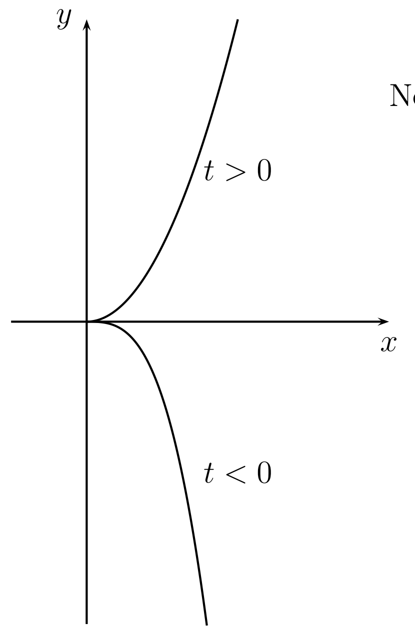
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad \text{(Polynom } n\text{–ten Grades)}$$

c)
$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot t \qquad \text{(Gerade im Raum)}$$

d)
$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^3$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad y = \pm x^{\frac{3}{2}}\,, \quad x \geq 0$$



Neilsche Parabel

Beispiel 2 (Bézier Kurven, $t \in [0,1]$)

Gesucht: Bézier–Darstellung (bzgl. $[0,1]$) von (2)

$$\text{Satz 15.2c)} \Rightarrow \quad t = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} B_i^{(n)}(t)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x^2 n(n-1) = \sum_{i=0}^{n} (i^2 - i) B_i^{(n)}(x)}}{\text{Satz 15.(5)}} \quad \Rightarrow \quad t^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{i(i-1)}{n(n-1)} B_i^{(n)}(t)$$

$$n = 2: \quad t = \frac{1}{2} B_1^{(2)}(t) + B_2^{(2)}(t)$$

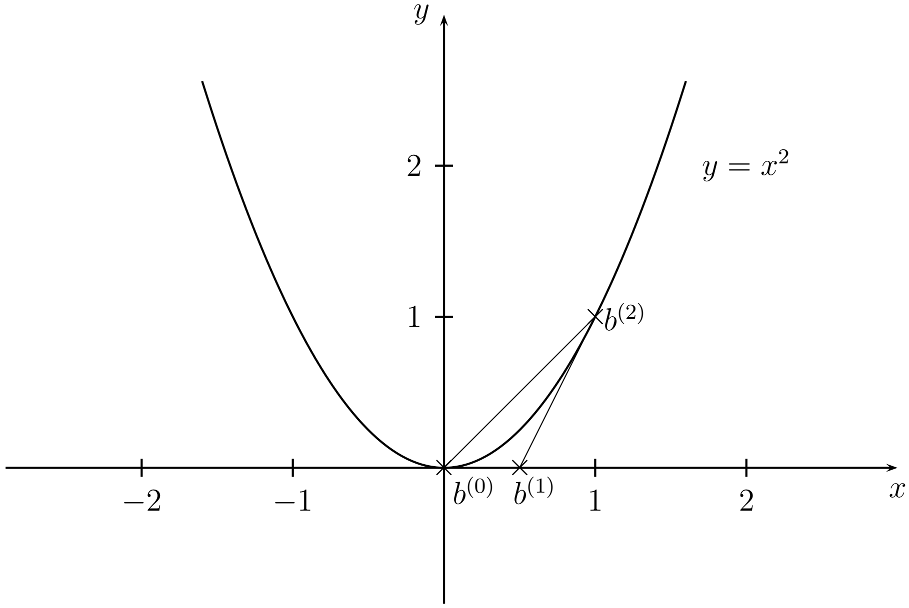
$$t^2 = B_2^{(2)}(t)$$

In (2):

$$\begin{aligned}
P(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2} B_1^{(2)}(t) + B_2^{(2)}(t) \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_2^{(2)}(t) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} B_1^{(2)}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_2^{(2)}(t) \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_0^{(2)}(t)}_{\text{ergänzt}} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} B_1^{(2)}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_2^{(2)}(t) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1-t)^2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2t(1-t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2
\end{aligned}$$

Bézier–Punkte: $\quad b^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(0,0)$ und $(1,1)$ liegen auf der Parabel $K:\ y = x^2\,,\quad (\frac{1}{2},0)$ liegt nicht auf $K\,.$



$\times$ Bézier-Punkte

— Bézier-Polygon

conv$\{b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}\}$

Beispiel 3

Gegeben:

$$p(x) := 0 \cdot B_0^{(3)}(x) + 1 \cdot B_1^{(3)}(x) + 2 \cdot B_2^{(3)}(x) + 2 \cdot B_3^{(3)}(x) \tag{3}$$

Gesucht: a) Bézier–Kurve $P(t)$, die mit dem Graphen von p übereinstimmt.
b) zugehörige Bézier–Punkte.

Lösung:

a) Graph von p : $\quad (x,y) = (x, p(x))$

Triviale Parametrisierung: $x = t\,,\ y = p(t)$

$$\Rightarrow \quad P(t) = \begin{pmatrix} t \\ p(t) \end{pmatrix}$$

Satz 15.2c) $\Rightarrow \quad t = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} B_i^{(n)}(t) \underset{n=3}{=} \sum_{i=0}^{3} \frac{i}{3} B_i^{(3)}(t)$

$$\Rightarrow \quad P(t) = \begin{pmatrix} \frac{0}{3} \\ 0 \end{pmatrix} B_0^{(3)}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} B_1^{(3)}(t) + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} B_2^{(3)}(t) + \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ 2 \end{pmatrix} B_3^{(3)}(t)$$

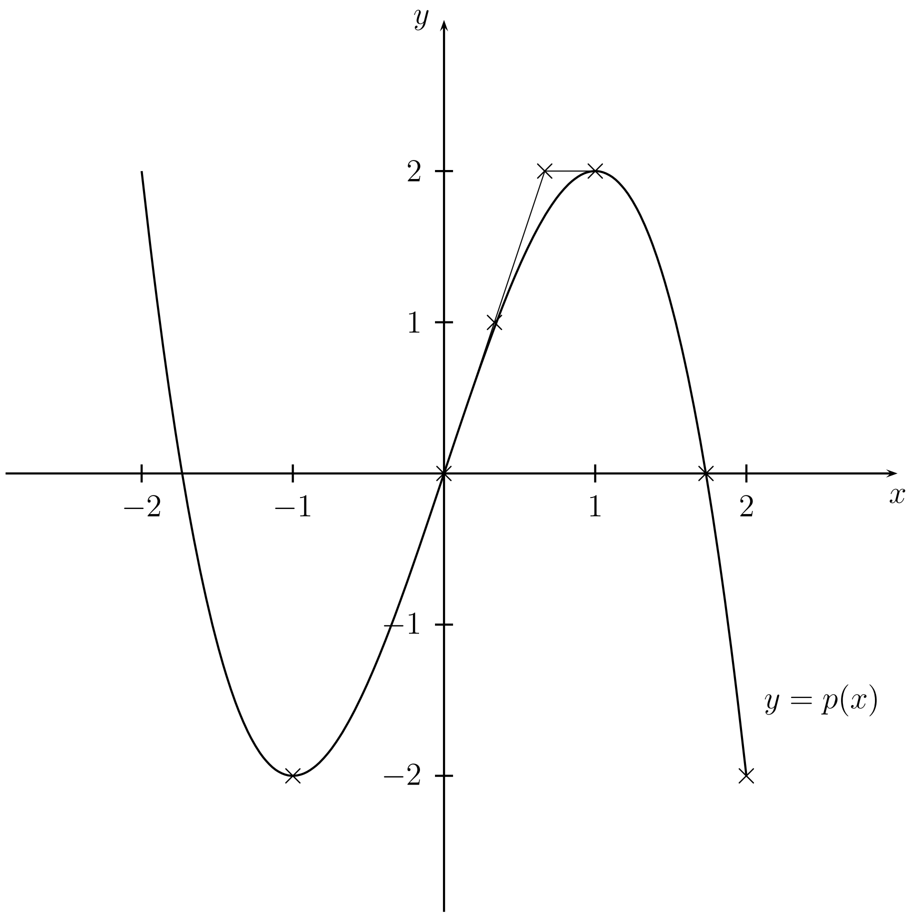
Abszissen: äquidistant; $\quad x_i = \dfrac{i}{3}\,, \quad i = 0,1,2,3$

Ordinaten: Koeffizienten in (3).

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \cdot 3x(1-x)^2 + 2 \cdot 3x^2(1-x) + 2x^3 \\ &= 3(x - 2x^2 + x^3) + 6(x^2 - x^3) + 2x^3 = 3x - x^3 = x(3 - x^2) \end{aligned}$$

$$p'(x) = 3 - 3x^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

b) Bézier–Punkte: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$



Bemerkung 2

a) Wegen

$$B_i^{(n)}(0) = \delta_{0i}\,, \quad B_i^{(n)}(1) = \delta_{ni} \tag{4}$$

(δ_{ij} Kronecker–Symbol) gilt

$$P(0) = b^{(0)}\,, \quad P(1) = b^{(n)} \quad \text{für } P \text{ aus (1).} \tag{5}$$

D.h., $\underline{\text{die Bézier–Punkte } b^{(0)} \text{ und } b^{(n)} \text{ liegen stets auf der Bézier–Kurve}}$ $(b^{(1)}, \ldots, b^{(n-1)}$ im Allgemeinen nicht).

Schränkt man t auf $[0,1]$ ein, so bilden $b^{(0)}, b^{(n)}$ die Enden der Bézier–Kurve.

b) $$P'(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S. 15.2i)}}}{=} \sum_{i=0}^{n} b^{(i)} \cdot n \left[B_{i-1}^{(n-1)}(t) - B_i^{(n-1)}(t)\right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ B_{-1}^{(n-1)}=0 \\ B_n^{(n-1)}=0}}{=} n \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b^{(i)} B_{i-1}^{(n-1)}(t)}_{\substack{\text{Indexverschiebung} \\ i-1 \rightsquigarrow i}} - \sum_{i=0}^{n-1} b^{(i)} B_i^{(n-1)}(t) \right\}$$

$$= n \sum_{i=0}^{n-1} (b^{(i+1)} - b^{(i)}) B_i^{(n-1)}(t) \tag{6}$$

$$\underset{\text{analog (5)}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{lcl} P'(0) = n(b^{(1)} - b^{(0)}) & \Rightarrow & b^{(1)} = b^{(0)} + \frac{1}{n} P'(0) \\ P'(1) = n(b^{(n)} - b^{(n-1)}) & \Rightarrow & b^{(n-1)} = b^{(n)} - \frac{1}{n} P'(1) \end{array} \right\} \tag{7}$$

d.h., $\underline{b^{(1)}, b^{(n-1)} \text{ liegen auf der Tangente an die Bézier–Kurve durch } b^{(0)} \text{ und } b^{(n)}}$ (siehe Beispiel 2 und 3).

c) $$\frac{d^k}{dt^k} P(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \left(B_i^{(n-k)}(t) \cdot \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b^{(i+j)} \right) \tag{8}$$

Beweis (vollständige Induktion nach k)

$k = 1:$ (6) $\Rightarrow$ (8)

$k \longrightarrow k+1:$

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} P(t) \underset{\text{Ind.vor. + S.15.2i)}}{=} \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} (n-k) \left[B_{i-1}^{(n-k-1)}(t) - B_i^{(n-k-1)}(t) \right] \cdot$$
$$\cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b^{(i+j)}}_{=:c_i}$$

$$= \frac{n!}{[n-(k+1)]!} \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{n-k} B_{i-1}^{(n-k-1)}(t) c_i}_{\sum_{i=0}^{n-k-1} B_i^{(n-k-1)}(t) c_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-k-1} B_i^{(n-k-1)}(t) c_i \right\}$$

$$\frac{n!}{(n-k-1)!} \sum_{i=0}^{n-k-1} B_i^{(n-k-1)}(t)(c_{i+1} - c_i) \tag{9}$$

$$c_{i+1} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b^{(i+1+j)} \underset{\substack{\uparrow \\ j+1 \rightsquigarrow j}}{=} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k-j+1} \binom{k}{j-1} b^{(i+j)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad c_{i+1} - c_i \quad &= \quad \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j+1} \left\{ \binom{k}{j} - (-1) \cdot \binom{k}{j-1} \right\} b^{(i+j)} \\
&+ \quad (-1)^{k+1-(k+1)} \binom{k}{k+1-1} b^{(i+k+1)} \\
&- \quad (-1)^{k-0} \binom{k}{0} b^{(i+0)} \\
&= \quad \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} b^{(i+j)} \quad \underset{(9)}{\Rightarrow} \quad \text{Behauptung}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3

a) Ist $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine affine Abbildung, d.h. $\Phi(x) = c + Ax$ mit $c \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, so ist $\Phi(P(t))$ bereits durch die Bilder der Bézier–Punkte festgelegt.

Beweis

$$\begin{aligned}
P(t) \quad &= \quad \sum_{i=0}^{n} b^{(i)} \underbrace{B_i^{(n)}(t)}_{\in \mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \Phi(P(t)) = \Phi\left(\sum_{i=0}^{n} b^{(i)} \cdot B_i^{(n)}(t) \right) \\
&= \quad c + A \cdot \sum_{i=0}^{n} b^{(i)} \cdot B_i^{(n)}(t) = c \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} B_i^{(n)}(t)}_{\substack{=1 \\ \text{S. 15.2 b)}}} \\
&+ \quad \sum_{i=0}^{n} A b^{(i)} \cdot B_i^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(c + A b^{(i)})}_{=\Phi(b^{(i)})} B_i^{(n)}(t)
\end{aligned}$$

□

b) Bemerkung 3a) beruht wesentlich auf der Eigenschaft b) der Bernstein–Polynome in Satz 15.2. Ein Analogon dieser Bemerkung gilt im allgemeinen nicht für die Basen von $\mathbb{P}_n$ aus Satz 15.1.

Definition 2

a) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt <u>konvex</u>, wenn mit je zwei Punkten $x, y \in M$ auch deren Verbindungsstrecke

$$[x, y] := x + \lambda(y - x)\,, \quad 0 \le \lambda \le 1,$$

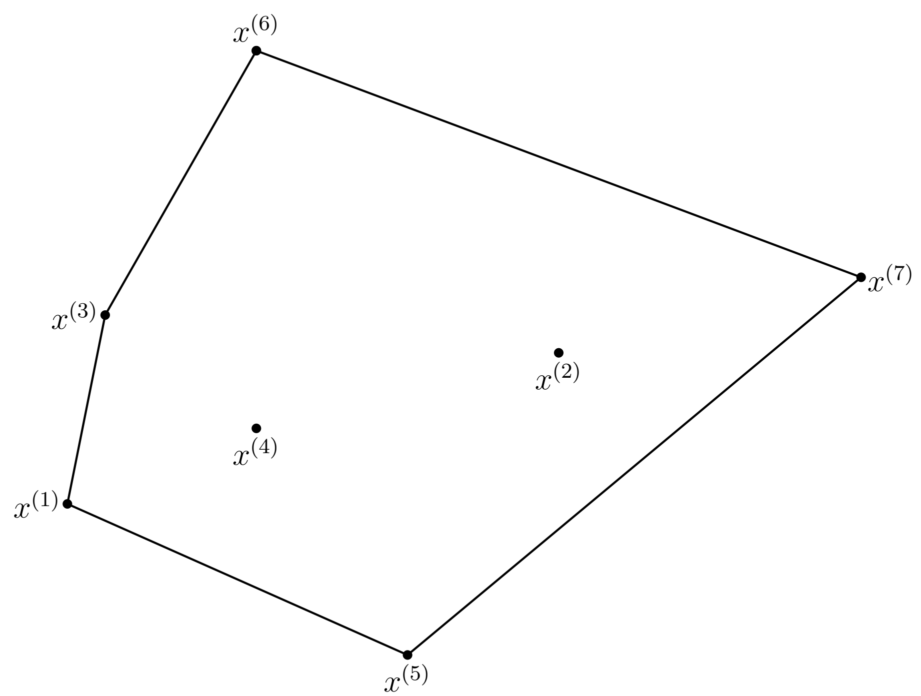
in M liegt.

b) Der Durchschnitt $\text{conv}(M)$ aller konvexen Obermengen einer gegebenen Menge M heißt konvexe Hülle von M.
(conv(M) ist die bzgl. „$\subseteq$" kleinste konvexe Obermenge von M.)

c) $x := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ heißt Konvexkombination von $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \in \mathbb{R}^d$.

Bemerkung 4

a) $\text{conv}\{x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\}$ = Menge aller Konvexkombinationen von $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$.



b) Wegen Satz 15.2 a),b) gilt

$$P(t) \in \text{conv}\{b^{(0)}, \ldots, b^{(n)}\},$$

d.h., jede Bézier–Kurve (1) liegt in der konvexen Hülle ihrer Bézier–Punkte.
(Vgl. Beispiel 2!)
(In Def. 2c) ist $\alpha_i = B_i^{(n)}(t), \quad x^{(i)} = b^{(i)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$)

Definition 3 (Hilfsfunktionen)

Sei P wie in (1) und $0 \leq r \leq s \leq n$.

$$b^{(r,s)}(t) := \sum_{i=r}^{s} b^{(i)} B_{i-r}^{(s-r)}(t) \underset{\overset{\uparrow}{j:=i-r}}{=} \sum_{j=0}^{s-r} b^{(r+j)} B_j^{(s-r)}(t).$$

Satz 1

Mit P wie in (1) und $b^{(r,s)}$ wie in Definition 3 gilt

a) $b^{(r,r)}(t) = b^{(r)} \underbrace{B_0^{(0)}(t)}_{=1 \text{ nach S.15.2e)}} = b^{(r)}$;

b) $b^{(r,s)}(t) = (1-t)b^{(r,s-1)}(t) + t\, b^{(r+1,s)}(t)$, falls $r < s$;

c) $b^{(0,n)}(t) = \sum_{i=0}^{n} b^{(i)} B_i^{(n)}(t) = P(t)$.

Beweis

a), c) trivial

b)
$$
\begin{aligned}
b^{(r,s)}(t) &= \sum_{i=r}^{s} b^{(i)} B_{i-r}^{(s-r)}(t) \\
&\underset{\text{S.15.2g)}}{=} \sum_{i=r}^{s} b^{(i)} \left[t B_{i-r-1}^{(s-r-1)}(t) + (1-t) B_{i-r}^{(s-r-1)}(t) \right] \\
&= b^{(r)} \cdot t \cdot \underbrace{B_{-1}^{(s-r-1)}(t)}_{=0} + t \cdot \sum_{i=r+1}^{s} B_{i-(r+1)}^{(s-(r+1))}(t) \\
&\quad + (1-t) \sum_{i=r}^{s-1} b^{(i)} B_{i-r}^{((s-1)-r)}(t) + b^{(s)} \cdot (1-t) \cdot \underbrace{B_{s-r}^{(s-r-1)}(t)}_{=0}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Behauptung

□

Wegen Satz 1 kann man für festes $t = \lambda \in (0,1)$ den Wert $P(\lambda)$ durch fortgesetzte lineare Interpolation berechnen, ohne die Bernstein–Polynome zu bestimmen:

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\text{(10a)} & b^{(r,r)} := b^{(r)}, & r = 0, \ldots, n \\
\text{(10b)} & b^{(r,s)} := (1-\lambda) b^{(r,s-1)} + \lambda b^{(r+1,s)}, & r = 0, \ldots, n \\
 & & s = r+1, \ldots n \\
\text{(10c)} & P(\lambda) = b^{(0,n)} &
\end{array}
\right\} \qquad (10)
$$

(10) heißt Algorithmus von de Casteljau (1959).

Schema von de Casteljau

$$\begin{tikzcd}
b^{(0)} \arrow[dr, dash] \\
b^{(1)} \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & b^{(0,1)} \arrow[dr, dash] \\
b^{(2)} \arrow[r, dash] & b^{(1,2)} \arrow[r, dash] & b^{(0,2)} \\
\vdots \arrow[dr, dash] & \vdots \arrow[dr, dash] & \vdots & \ddots \\
b^{(n)} \arrow[r, dash] & b^{(n-1,n)} \arrow[r, dash] & b^{(n-2,n)} & \cdots & b^{(0,n)} = P(\lambda)
\end{tikzcd}$$

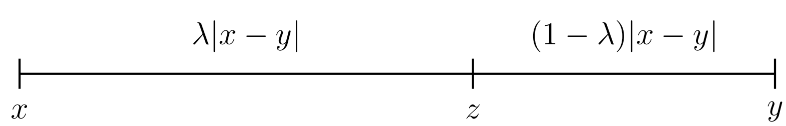
Bemerkung 5

a) (10b) stellt eine Konvexkombination dar. ($\lambda \in (0,1)$!)

b) Zur Konstruktion der Punkte $b^{(r,s)}$ geht man vom Bézier–Polygonzug aus und teilt dessen Seiten im Verhältnis λ zu $1-\lambda$. Dann verbindet man die Teilpunkte $b^{(i-1,i)}, b^{(i,i+1)}$, $\quad i = 1, \ldots, n-1$. Mit dem so entstandenen Streckenzug (mit dem Anfangspunkt $b^{(0,1)}$ und dem Endpunkt $b^{(n-1,n)}$) verfährt man analog.

Beachte:

$$\text{(10b)} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{b^{(r,s)}}^{=:z} - b^{(r,s-1)} = \lambda[\underbrace{b^{(r+1,s)}}_{=:y} - \underbrace{b^{(r,s-1)}}_{=:x}]$$



$$z = (1-\lambda)x + \lambda y \quad \Rightarrow \quad z - x = \lambda(y-x)\,, \quad y - z = (1-\lambda)(y-x)$$

c) Verbindet man am Ende des Algorithmus $b^{(0)}, b^{(0,1)}, b^{(0,2)}, \ldots, b^{(0,n)} = P(\lambda)$ sowie $P(\lambda) = b^{(0,n)}, b^{(1,n)}, \ldots, b^{(n)}$ geradlinig, so erhält man zwei Streckenzüge s_1, s_2 deren Anfangs–/Endpunkt jeweils auf der Bézier-Kurve liegen und die trivialerweise in der konvexen Hülle der ursprünglichen Bézier–Punkte verlaufen. (Mit zwei Punkten liegt auch ihre Verbindungsstrecke in einer konvexen Menge!)

Satz 2

Mit den Bernstein–Polynomen $B_i^{(n)}(t;a,b)$ bzgl. des Intervalls $[a,b]$ und $B_i^{(n)}(t) = B_i^{(n)}(t;0,1)$ wie in §15 sei

$$\begin{aligned} P(t) &:= \sum_{i=0}^{n} b^{(i)} B_i^{(n)}(t) \qquad \text{(s. (1))}\,, \\ P_1(t) &:= \sum_{i=0}^{n} b^{(0,i)}(\lambda) B_i^{(n)}(t;0,\lambda) = \sum_{i=0}^{n} b^{(0,i)}(\lambda) B_i^{(n)}(\frac{t}{\lambda})\,, \\ P_2(t) &:= \sum_{i=0}^{n} b^{(i,n)}(\lambda) B_i^{(n)}(t;\lambda,1) = \sum_{i=0}^{n} b^{(i,n)}(\lambda) B_i^{(n)}(\frac{t-\lambda}{1-\lambda})\,, \end{aligned}$$

mit $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt

$$P(t) = P_1(t) = P_2(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis

$$P_1(t) \underset{\text{Def. 3}}{=} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} b^{(j)} B_j^{(i)}(\lambda) B_i^{(n)}(t;0,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b^{(k)} \underbrace{\sum_{l=k}^{n} B_k^{(l)}(\lambda) B_l^{(n)}(t;0,\lambda)}_{=:A}$$

Zu zeigen: $\quad A = B_k^{(n)}(t)$

Wegen
$$\binom{l}{k} \cdot \binom{n}{l} = \frac{l!}{k!(l-k)!} \cdot \frac{n!}{l!(n-l)!} = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{(l-k)!(n-l)!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$$

gilt

$$\begin{aligned} A &= \sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{l-k} \binom{n}{l} t^l (\lambda - t)^{n-l} / \lambda^n \\ &= \binom{n}{k} \lambda^{k-n} t^k \sum_{l=k}^{n} \binom{n-k}{l-k} [t(1-\lambda)]^{l-k} (\lambda - t)^{n-l} \\ &\underset{s=l-k}{=} \binom{n}{k} \lambda^{k-n} t^k \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n-k}{s} [t(1-\lambda)]^{s} (\lambda - t)^{n-k-s} \\ &= \binom{n}{k} \lambda^{k-n} t^k (t - \lambda t + \lambda - t)^{n-k} = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = B_k^{(n)}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(t) &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} b^{(j)} B_{j-i}^{(n-i)}(\lambda) B_i^{(n)}(t;\lambda,1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} b^{(k)} \underbrace{\sum_{l=0}^{k} B_{k-l}^{(n-l)}(\lambda) B_l^{(n)}(t;\lambda,1)}_{=:A'} \end{aligned}$$

Zu zeigen: $\quad A' = B_k^{(n)}(t)$

$$A' = \sum_{l=0}^{k} \binom{n-l}{k-l} \lambda^{k-l}(1-\lambda)^{n-k} \binom{n}{l} (t-\lambda)^l (1-t)^{n-l}(1-\lambda)^{-n}$$

$$\binom{n-l}{k-l} \cdot \binom{n}{l} = \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{l!(n-l)!} = \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{l!(k-l)!} = \binom{n}{k}\binom{k}{l}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad A' &= \binom{n}{k}(1-t)^{n-k}(1-\lambda)^{-k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (t-\lambda)^l [\lambda(1-t)]^{k-l} \\ &= \binom{n}{k}(1-t)^{n-k}(1-\lambda)^{-k}[t-\lambda+\lambda-\lambda t]^k = B_k^{(n)}(t) \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe

Zeige: $b^{(0,n-1)}$ und $b^{(1,n)}$ aus der vorletzten Spalte des Algorithmus von de Casteljau liegen auf der Tangente an $P(t)$ in $P(\lambda) = b^{(0,n)}$.

Beweis

Bemerkung 2b), angewandt auf $P_1(t), P_2(t)$ aus Satz 2 unter Beachtung von (10).

Beispiel 4

$$\begin{aligned} P(t) \quad &:= \binom{0}{0} B_0^{(3)}(t) + \binom{0}{1} B_1^{(3)}(t) + \binom{1}{1} B_2^{(3)}(t) + \binom{1}{0} B_3^{(3)}(t) \\ &= \binom{0}{1} \cdot 3 \cdot t(1-t)^2 + \binom{1}{1} \cdot 3 \cdot t^2(1-t) + \binom{1}{0} t^3 \qquad (11) \\ &= \begin{pmatrix} 3t^2 - 3t^3 + t^3 \\ 3t - 6t^2 + 3t^3 + 3t^2 - 3t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t^3 + 3t^2 \\ -3t^2 + 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bézier–Punkte: $\quad$ Ecken des Einheitsquadrats

Waagerechte Tangente: $\left.\begin{array}{l} \dot{y}(t) = -6t + 3 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \\ \dot{x}(t) = -6t^2 + 6t \quad \Rightarrow \dot{x}(\frac{1}{2}) \neq 0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ waagerechte Tangente in $P(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Senkrechte Tangente: $\quad \dot{x}(t) = -6t^2 + 6t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0,\ t_2 = 1$

$\dot{y}(0) = 3 \neq 0\,, \quad \dot{y}(1) = -3 \neq 0$

$$\Rightarrow \text{ senkrechte Tangente in } P(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und in } P(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $P(\lambda)$ mit $\lambda = \frac{1}{4}$ mit dem Algorithmus von de Casteljau $(1 - \lambda = \frac{3}{4})$

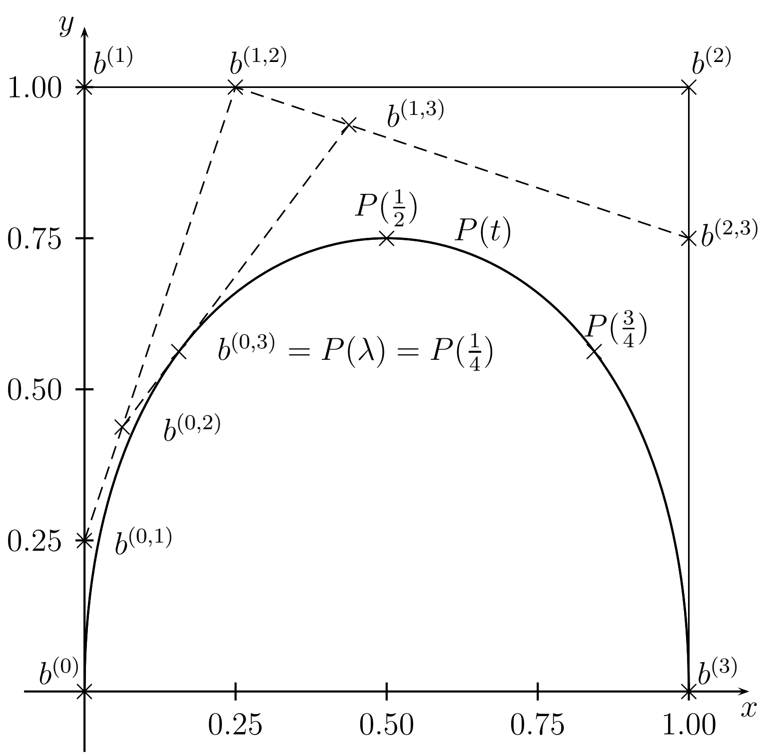
$$b^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b^{(0,1)} = (1-\lambda)b^{(0)} + \lambda b^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b^{(0,2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix}$$

$$b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad b^{(1,3)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ \frac{15}{16} \end{pmatrix} \qquad b^{(0,3)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{32} \\ \frac{9}{16} \end{pmatrix} = P(\frac{1}{4})$$

(Probe: Setze $\lambda = \frac{1}{4}$ in (11) ein!)



Beachte: $\underset{\text{im Allg.}}{t \neq x}$

$$P(\frac{3}{4}) = \begin{pmatrix} -\frac{27}{32} & + & \frac{27}{16} \\ -\frac{27}{16} & + & \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{32} \\ \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P_1(t) &= b^{(0)}B_0^{(3)}(t;0,\tfrac{1}{4}) + b^{(0,1)}B_1^{(3)}(t;0,\tfrac{1}{4}) + b^{(0,2)}B_2^{(3)}(t;0,\tfrac{1}{4}) \\
&\quad + b^{(0,3)}B_3^{(3)}(t;0,\tfrac{1}{4}) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot 3 \cdot t(\frac{1}{4} - t)^2 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{4}-0)^3} + \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix} 3 \cdot t^2(\frac{1}{4} - t)\frac{1}{(\frac{1}{4}-0)^3} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \frac{5}{32} \\ \frac{9}{16} \end{pmatrix} t^3 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{4}-0)^3} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 3t(1-4t)^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot 3t^2(1-4t) + \begin{pmatrix} 10 \\ 36 \end{pmatrix} t^3 \\
&= \begin{pmatrix} 3t^2 - 12t^3 + 10t^3 \\ 3t - 24t^2 + 48t^3 + 21t^2 - 84t^3 + 36t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t^3 + 3t^2 \\ -3t^2 + 3t \end{pmatrix} = P(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(t) &= b^{(0,3)}B_0^{(3)}(t;\tfrac{1}{4},1) + b^{(1,3)}B_1^{(3)}(t;\tfrac{1}{4},1) \\
&\quad + b^{(2,3)}B_2^{(3)}(t;\tfrac{1}{4},1) + b^{(3)}B_3^{(3)}(t;\tfrac{1}{4},1) \\
&= \Bigg\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{32} \\ \frac{9}{16} \end{pmatrix} (1-t)^3 + \begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ \frac{15}{16} \end{pmatrix} \cdot 3(t - \frac{1}{4}) \underbrace{(1-t)^2}_{1-2t+t^2} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot 3 \underbrace{(t - \frac{1}{4})^2}_{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{16}} (1-t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (t - \frac{1}{4})^3 \Bigg\} \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^3} \\
&= \Bigg\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{32}(1 - 3t + 3t^2 - t^3) + \frac{21}{16}(t - 2t^2 + t^3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{t^2}{4}) \\ \frac{9}{16}(1 - 3t + 3t^2 - t^3) + \frac{45}{16}(t^3 - \frac{9}{4}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}) \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 3(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{16} - t^3 + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{16}) + t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{16}t - \frac{1}{64} \\ \frac{9}{4}(-t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{9}{16}t + \frac{1}{16}) \end{pmatrix} \Bigg\} \cdot \frac{64}{27} \\
&= \frac{64}{27} \Bigg\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{32} - \frac{21}{64} + \frac{3}{16} - \frac{1}{64} + t(-\frac{15}{32} + \frac{63}{32} - \frac{27}{16} + \frac{3}{16}) \\ \frac{9}{16} - \frac{45}{64} + \frac{9}{64} + t(-\frac{27}{16} + \frac{135}{32} - \frac{81}{64}) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} t^2(\frac{15}{32} - \frac{189}{64} + \frac{9}{2} - \frac{3}{4}) + t^3(-\frac{5}{32} + \frac{21}{16} - 3 + 1) \\ t^2(\frac{27}{16} - \frac{405}{64} + \frac{27}{8}) + t^3(-\frac{9}{16} + \frac{45}{16} - \frac{9}{4}) \end{pmatrix} \Bigg\} \\
&= \frac{64}{27} \begin{pmatrix} t^2\frac{81}{64} + t^3(-\frac{27}{32}) \\ t\frac{81}{64} + t^2(-\frac{81}{64}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 2t^3 \\ 3t - 3t^2 \end{pmatrix} = P(t)
\end{aligned}$$