Übungsaufgaben Diskrete Mathematik und Optimierung

SERIE 2 Termin: 05.05.2004

2.1 Man überführe das LOP

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 1 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\longrightarrow \max \end{aligned}$$

in die Normalform mit 5 Variablen!

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{o} \\ \underline{c}^T\underline{x} &\longrightarrow \max \quad . \end{aligned}$$

2.2 Auf einer Farm werden Kühe und Schafe gehalten. Für 50 Kühe und 200 Schafe sind Ställe vorhanden. Die Farm umfasst 72 Morgen Weideland. Für eine Kuh werden ein Morgen, für ein Schaf $0,2$ Morgen Weide benötigt. Auf eine Kuh entfallen jährlich 150 Arbeitsstunden, auf ein Schaf 25 Arbeitsstunden. Zur Versorgung des Viehs stehen jährlich bis zu 10.000 Arbeitsstunden zur Verfügung. Der jährlich erzielte Reingewinn beträgt je Kuh 250 EUR und je Schaf 55 EUR. Die Anzahl der zu haltenen Kühe und Schafe so zu bestimmen, dass der Gesamtgewinn möglichst groß ist.

Stellen Sie das zugehörige lineare Optimierungsproblem auf. Überführen Sie dieses Problem in Normalform und ermitteln Sie die optimale Lösung mit der Simplexmethode.
Achten Sie bei der Abfolge der Schritte im Simplexalgorithmus darauf welchen Eckpunkten bei der graphischen Lösung (siehe Serie 1 Aufgabe 2) die jeweiligen Simplextabellen zugeordnet werden können.

2.3 Man bestimme alle zulässigen Basislösungen des Bereichs, der wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

An welcher ZBL nimmt die Zielfunktion $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$ ihren maximalen Wert an?

2.4 Man löse mit Hilfe der Simplexmethode:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & & & - & 2x_4 & \leq & 1 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & \leq & 4 \\ & & & & & & \underline{x} & \geq & \underline{0} \\ & & & 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 & & & & \to & \min . \end{array}$$

(**Hinweis:** Man wähle die Eingangsspalte möglichst so, dass das Kreuzelement 1 wird.)

2.5 Man zeige: Die Menge aller optimalen Lösungen des LOP's

$$\max\{\underline{c}^T\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$$

ist konvex.

2.6 Sei Z der zulässige Bereich des LOP's

$$\max\{\underline{c}^T\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}.$$

Ein Punkt $\underline{x}$ heißt *Ecke* von Z, falls $\underline{x} \in Z$ ist und aus $\underline{x} = \lambda\underline{y} + (1-\lambda)\underline{z}$, $0 < \lambda < 1$, $\underline{y}, \underline{z} \in Z$ folgt, dass $\underline{x} = \underline{y} = \underline{z}$ ist. Man zeige, dass $\underline{x}$ genau dann Ecke ist, wenn $\underline{x}$ zulässige Basislösung ist.