Übungsaufgaben Diskrete Mathematik und Optimierung

SERIE 3 Termin: $\boxed{19.05.2004}$

3.1 Man löse mit Blands Methode das entartete lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rcl}
x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\
x_1 + x_2 + x_4 & = & 10 \\
x_1 - 4x_2 + x_5 & = & 0 \\
-4x_1 + x_2 + x_6 & = & 0 \\
\underline{x} & \geq & 0 \\
x_1 + 2x_2 & \to & \max \quad .
\end{array}$$

3.2 Man löse graphisch und rechnerisch für alle Werte des Parameters t das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rcl}
x_1 - x_2 & \leq & 1 \\
2x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
-2x_1 + x_2 & \leq & 1 \\
\underline{x} & \geq & \underline{o}
\end{array}
\qquad (1-t)x_1 + (1-2t)x_2 \longrightarrow \max$$

3.3 Man löse das folgende lineare Optimierungsproblem, indem man zunächst eine erste Ecke bestimmt und dann die Simplexmethode anwendet:

$$\left.\begin{array}{rcl}
x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 9 \\
\underline{x} & \geq & \underline{0}
\end{array}\right\}
\qquad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \longrightarrow \max \ .$$

3.4 Bei der Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung für das Problem

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max,\ A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

löst man zuerst das Hilfsproblem (mit den künstlichen Variablen $\mathbf{y}$)

$$-\mathbf{1}^T\mathbf{y} \to \max,\ A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

mit dem Simplexalgorithmus. Endet man bei einer optimalen Lösung mit Zielfunktionswert 0 und einer Simplextabelle R mit minimaler Anzahl von zu künstlichen Variablen gehörenden Zeilen, dann erhält man eine zulässige Basislösung des ursprünglichen Problems und deren Simplextabelle durch Streichen aller Spalten und Zeilen die zu künstlichen Variablen gehören, und der Aktualisierung von

$$w := \mathbf{c}_B^T\mathbf{s} \text{ und } g_j := \mathbf{c}_B^T\mathbf{R}_j - c_{\gamma_j}.$$

Zeigen Sie, dass diese Aktualisierung gerade die vollständige Simplextabelle zu der beschriebenen Basislösung liefert.

3.5 Man zeige, dass die Lösungsmengen von

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots \quad\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ \vdots \quad\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \\ -(\sum\limits_{i=1}^m a_{i1})x_1 - \ldots - (\sum\limits_{i=1}^m a_{in})x_n & \leq & -\sum\limits_{i=1}^m b_i \end{array}$$

einander gleich sind.

3.6 Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls für alle $\underline{x}, \underline{y} \in M$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ der Punkt $\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$ ebenfalls zu M gehört.
Man zeige:

(a) Der zulässige Bereich des LOP's $\begin{array}{rcl} A\underline{x} & = & \underline{b} \\ \underline{x} & \geq & \underline{0} \\ \underline{c}^T\underline{x} & \longrightarrow & \max \end{array}$ ist konvex.

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f(\underline{x}) = \underline{c}^T\underline{x}$. Man zeige: Jedes lokale Maximum (Minimum) von $f(\underline{x})$ auf M ist auch globales Maximum (Minimum).