Übungsaufgaben — Diskrete Mathematik und Optimierung

SERIE 4 — Termin: 02.06.2004

4.1 In einem Betrieb sind aus Blechen von 225*cm* Breite 50 Bleche von 110*cm* Breite, 200 Bleche von 80*cm* Breite und 100 Bleche von 76*cm* Breite zuzuschneiden. Man untersuche, wieviel Bleche von 225*cm* Breite zugeschnitten werden müssen und auf welche Weise das geschehen muss, damit der Abfall minimal wird.
(**Anleitung:** In einer Tabelle stelle man zusammen, auf wieviel verschiedene Arten ein Blech von 225*cm* Breite in Bleche der Breite von 110*cm*, 80*cm* und 76*cm* zugeschnitten werden kann. Der Abfall ist genau dann minimal, wenn die Anzahl der zugeschnittenen Bleche minimal ist. Die Rechnung kann mit Hilfe von MAPLE durchgeführt werden.)

4.2 Gegeben ist ein lineares Optimierungsproblem:

$$
(P)\qquad
\begin{array}{rcl}
x_1 + 4x_2 & = & \text{MAX} \\
2x_1 + \ 4x_2 & \leq & 100 \\
5x_1 + \ 4x_2 & \leq & 200 \\
x_2 & \leq & 20 \\
x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a.) Stellen Sie das zu (P) zugehörige duale Optimierungsproblem (D) auf.
b.) Die optimale Lösung von (D) lautet $y_1^* = 0.5, y_2^* = 0$ und $y_3^* = 2$. Berechnen Sie ausgehend von $\mathbf{y}^*$ die optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ von (P).
c.) Geben Sie ein Kriterium an, mit dem Sie überprüfen können, ob $\mathbf{x}^*$,$\mathbf{y}^*$ wirklich die gesuchten optimalen Lösungen sind. Führen Sie anhand dieses Kriteriums die Probe durch.

4.3 Eine Parfümerie stellt zwei After Shave AS1 und AS2 her. Die Grundlage bilden drei exotische Rohstoffe R1, R2, R3, die nur in begrenztem Umfang zur Verfügung stehen (32 ME von R1, 20 ME von R2 und 24 ME von R3). Um eine Mengeneinheit (ME) von AS1 zu produzieren, werden jeweils vier ME der Rohstoffe R1 und R2 benötigt. Zur Produktion einer ME des After Shave AS2 benötigt man 8 ME von R1, 2 ME von R2 und 8 ME von R3. Eine ME des After Shave AS1 bringt dem Unternehmen einen Reingewinn von 20 GE (Geldeinheiten). Beim After Shave AS2 beträgt der Gewinn 30 GE.
Geben Sie die Zielfunktion zur Gewinnmaximierung an und formulieren Sie das lineare Ungleichungssystem der Rohstoffrestriktionen.
Stellen Sie das duale Problem auf und überführen Sie das Problem in Normalform. Finden Sie eine erste zulässige Basislösung und die zugehörige Simplextabelle. Lösen Sie das Problem mit dem Simplexalgorithmus. Bestimmen Sie ausgehend von der optimalen Lösung des dualen Problems die optimale Lösung des primalen Optimierungsproblems. Wie kann man das duale Problem ökonomisch interpretieren?

4.4 Zeigen Sie, dass das LOP

$$\begin{array}{rcl} A\underline{x} & \leq & \underline{0} \\ \underline{c}^{\mathsf{T}}\underline{x} & \rightarrow & \max \end{array}$$

genau dann eine optimale Lösung besitzt, wenn $\underline{c}^{\mathsf{T}}\underline{x} \leq 0$ für alle zulässigen $\underline{x}$ gilt.
Hinweis: Man wende den Dualitätssatz an.