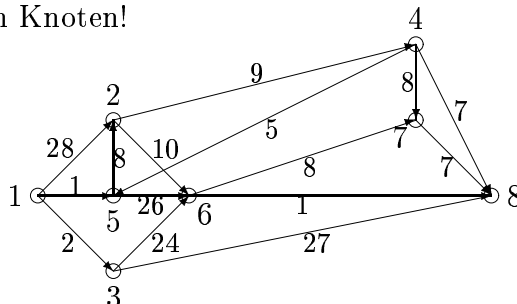
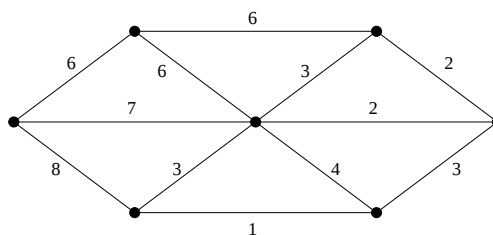


- 5.1 Für den in der Skizze angegebenen Graphen bestimme man kürzeste Wege von 1 zu den anderen Knoten!



- 5.2 Die folgende Abbildung zeigt einen kantenbewerteten Graph G :



- (a) Wieviele Gerüste besitzt G ?
- (b) Finden Sie ein Minimalgerüst für G .
- 5.3 Zeigen Sie, dass in jedem Graphen die Anzahl der Knoten mit ungerader Valenz eine gerade Zahl ist.
- 5.4 Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *paar*, wenn es eine Zerlegung $A \cup B$ von V gibt, so dass alle Kanten von G genau einen Endpunkt in A und genau einen in B haben. Man zeige: G ist genau dann paar, wenn G keinen geschlossenen Kantenzug ungerader Länge enthält.
(Hinweis: Zum Beweis der Rückrichtung nehme man o.B.d.A. an, dass G zusammenhängend ist, wähle einen festen Knoten v aus V und wähle für A die Menge aller Knoten, die einen geraden Abstand zu v haben.)

5.5

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Menge $T \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckung*, wenn jede Kante von G wenigstens einen Knoten in T hat. Eine Menge $M \subseteq E$ heißt *Matching*, wenn je zwei verschiedene Kanten aus M keinen Knoten gemeinsam besitzen. Man beweise mittels des Dualitätssatzes der linearen Optimierung und der totalen Unimodularität der Inzidenzmatrix eines paaren Graphen den folgenden Satz von König: Ist G ein paarer Graph, so gilt:

$$\max\{|M| : M \text{ Matching}\} = \min\{|T| : T \text{ Knotenüberdeckung}\}.$$

(**Hinweis:** Eine Matrix heißt *total unimodular*, wenn jeder quadratische Minor die Determinante -1, 0 oder 1 hat.)

Ohne Beweis dürfen Sie die folgenden Sätze benutzen: (a) Die Inzidenzmatrix eines paaren Graphen ist total unimodular. (b) Die Komponenten jeder Basislösung des LOP $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$ mit total unimodularer Matrix A und einem Vektor $\mathbf{b}$, dessen Komponenten alle ganzzahlig sind, sind ganzzahlig.)