

4.1 Gegeben ist das folgende Axiomensystem mit den undefinierten Termen

$$\mathbf{0}, ', +, \times$$

und den Syntaxregeln

- (a) $\mathbf{0}$ ist ein gültiger Ausdruck;
- (b) wenn x ein gültiger Ausdruck ist, dann ist auch x' einer;
- (c) wenn x und y gültige Ausdrücke sind, dann sind es auch $x + y$ und $x \times y$;
- (d) gültige Sätze sind von der Form $x = y$, wobei x und y gültige Ausdrücke sind; und
- (e) für gültige Ausdrücke x und y ist $x \neq y$ definiert als $\neg(x = y)$.

Auf dem Grundbereich der Menge aller gültiger Ausdrücke sind die Axiome

- (A1) $\forall x \forall y [(x' = y') \rightarrow (x = y)]$;
- (A2) $\forall x (\mathbf{0} \neq x')$;
- (A3) $\forall x [(x \neq \mathbf{0}) \rightarrow (\exists y (x = y'))]$;
- (A4) $\forall x (x + \mathbf{0} = x)$;
- (A5) $\forall x \forall y [x + y' = (x + y)']$;
- (A6) $\forall x (x \times \mathbf{0} = \mathbf{0})$; und
- (A7) $\forall x \forall y [x \times y' = (x \times y) + x]$ gegeben.

Zeigen Sie, dass die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit den Operationen Addition(+) und Multiplikation($\times$) und der Interpretation:

- $\mathbf{0}$ entspricht der natürlichen Zahl 0; und
- $'$ entspricht *der nächstgrößeren natürlichen Zahl*, d.h. $\mathbf{0}'$ entspricht 1, $(\mathbf{0}')'$ entspricht 2, usw.,

ein Modell des Axiomensystems ist. Beschreiben Sie die Axiome im Kontext der natürlichen Zahlen mit eigenen Worten.

4.2

Sei n eine natürliche Zahl größer als 1 und sei $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Eine Interpretation der undefinierten Terme der vorhergehenden Aufgabe ist wie folgt

- 0 entspricht der Zahl 0;
- $'$ entspricht *der nächstgrößeren Zahl* mit der Ausnahme $(n-1)' = 0$;
- $+$ entspricht der Addition modulo n ; und
- $\times$ entspricht der Multiplikation modulo n .

Zeigen Sie, dass diese Interpretation kein Modell des Axiomensystems ist. Welche(s) Axiom(e) sind/ist verletzt?

4.3

Sei $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ mit $\omega \notin \mathbb{N}$. Wir erweitern die Interpretation der ersten Aufgabe wie folgt

- $\omega' = \omega$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^* (n + \omega = \omega \wedge \omega + n = \omega)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^* (n \neq 0 \rightarrow (n \times \omega = \omega \wedge \omega \times n = \omega))$; und
- $0 \times \omega = 0 \wedge \omega \times 0 = 0$.

Ist diese Interpretation ein Modell des Axiomensystems? Wie kann man ω deuten?

4.4

Nutzen Sie das Axiomensystem aus der ersten Aufgabe zusammen mit den Definitionen $0' = 1, 1' = 2, 2' = 3$, usw., um einen **formalen** Beweis für den Satz

$$1 + 1 = 2$$

zu geben.