Übungsaufgaben

GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

SERIE 5

Termin: $\boxed{\textbf{23.06.2004}}$

5.1 Man beweise, dass für beliebige Mengen A und B gilt:

(a) $A \cap B = A \iff A \subseteq B$

(b) $A \cup B = B \iff A \subseteq B$

5.2 Sei P eine nichtleere endliche Menge. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Teilmengen von P heißt *Ultrafilter*, falls

$$\forall X \in \mathcal{F} \quad : \quad X \neq \emptyset \tag{1}$$
$$\forall X, Y \subseteq P \quad : \quad X \in \mathcal{F}, X \subseteq Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F} \tag{2}$$
$$\forall X, Y \subseteq P \quad : \quad X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F} \tag{3}$$
$$\forall X \subseteq P \quad : \quad X \in \mathcal{F} \text{ oder } P \setminus X \in \mathcal{F} \tag{4}$$

Man zeige: Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter in P, so gibt es genau ein $p_0 \in P$, so dass $\mathcal{F} = \{X \subseteq P : p_0 \in X\}$.

5.3 Man beweise die folgenden Rechengesetze für das kartesische Produkt.

(a) $(M_1 \cap M_2) \times N = (M_1 \times N) \cap (M_2 \times N)$

(b) $(M_1 \times N \subseteq M_2 \times N) \wedge (N \neq \emptyset) \Longrightarrow M_1 \subseteq M_2$