Übungsaufgaben

GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

SERIE 6

Termin: $\boxed{07.07.2004}$

6.1 Sei R eine beliebige Relation. Beweisen Sie, dass dann gilt:

(a) $(R^{-1})^{-1} = R$;

(b) dom$R$= ranR^{-1}, und ran$R$= domR^{-1};

(c) R ist rechts-eindeutig genau dann, wenn R^{-1} links-eindeutig ist, und R ist links-eindeutig genau dann, wenn R^{-1} rechts-eindeutig ist.

6.2 Sei R eine beliebige Relation und $(A_i)_{i\in I}$ eine beliebige indizierte Familie von Mengen. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Falls $I \neq \emptyset$, dann ist $R[\bigcap_{i\in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i\in I} R[A_i]$, wobei Gleichheit gilt, falls R links-eindeutig ist.

(b) Für beliebige Mengen A, B gilt $R[A] \setminus R[B] \subseteq R[A \setminus B]$, mit Gleichheit falls R links-eindeutig ist.

6.3 Beweisen Sie:
Es seien F, G beliebige Funktionen. Dann ist $F \circ G$ eine Funktion, $\mathrm{dom}(F \circ G) = \{x \in \mathrm{dom}G : G(x) \in \mathrm{dom}F\}$ und $\forall x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$ gilt $(F \circ G)(x) = F(G(x))$.

6.4 Zeigen Sie:

(a) Für alle Mengen X, Y existiert die Menge Y^X aller Funktionen von X nach Y.

(b) Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine beliebige indizierte Familie von Mengen. Dann existiert die Menge $\prod_{i\in I} X_i$ aller Funktionen f mit dom$f = I$ und $\forall i \in I : f(i) \in X_i$.

6.5 Beweisen Sie, das folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) Zu jeder Menge $\mathcal{S}$ nichtleerer Mengen gibt es eine Auswahlfunktion. (Auswahlaxiom)

(b) Für jede indizierte Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Mengen folgt aus $\forall i : X_i \neq \emptyset$, dass gilt $\prod_{i\in I} X_i \neq \{\emptyset\}$.