Prof. Dr. P. Takáč
Dr. M. Grüttmüller
Dr. S.-Z. Huang
Dr. M. Ulm

WiS 2003/2004
6.1.2004
– Blatt 11 –

Übungen zu:
Analysis III

Abgabetermin 13.1.2004

Aufgabe 1

Es sei H ein Hilbertraum und $a, b \in H$. Zeigen Sie die Parallellogramm Gleichung

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\,\|a\|^2 + 2\,\|b\|^2$$

und den Satz von Pythagoras

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \qquad \text{falls } (a,b) = 0.$$

Aufgabe 2

Es sei $H = L^2(-1,1)$ und es bezeichne $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^2-1\right)^n$ die Legendre Polynome.

(a) Zeigen Sie, daß die Folge der Legendre Polynome eine Orthogonalfolge in H sind.

(b) Zeigen Sie, daß $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Formel

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n \, dx = (-1)^n \frac{2^{2n+1} n!^2}{(2n+1)!}$$

(c) Zu der Orthonormalfolge $u_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$ in H, finden sie die Fourierreihen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x >= 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und der Funktion $g(x) = x^4$.

Aufgabe 3

Es sei $H = L^2(0,\infty)$. Finden Sie Zahlen $c_{j,i}$ mit $0 <= i <= j <= 2$, so, daß die endliche Funktionenfolge $u_0(x) = c_{0,0} e^{-x}$, $u_1(x) = (c_{1,0} + c_{1,1} x)\, e^{-x}$, $u_2(x) = (c_{2,0} + c_{2,1} x + c_{2,2} x^2)\, e^{-x}$, eine Orthonormalfolge wird.
Hinweis: Verwenden Sie die Formel

$$\int_0^\infty x^n e^{-2x} \, dx = \frac{n!}{2^{n+1}}$$