Prof. Dr. P. Takáč
Dr. M. Grüttmüller
Dr. S.-Z. Huang
Dr. M. Ulm

WiS 2003/2004
11.11.2003
– Blatt 5 –

Übungen zu:
Analysis III
Abgabetermin 18.11.2003

Aufgabe 1

Die Gompetz-Gleichung
$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\log(K/N(t))$$
ist ein Modell für Bevölkerungswachstum, wobei r und K positive Konstanten sind.
(a) Löse die Gompetz-Gleichung mit der Anfangsbedingung $N(0) = N_0 > 0$ durch den Ansatz $u(t) = \log(N(t)/K)$.
(b) Verwenden Sie das Gompetz-Modell mit den Daten $r = 0.71$ pro Jahr, $K = 80.5 \times 10^6$, $N_0/K = 0.25$. Skizzieren Sie diese Lösung, und berechnen Sie den Wert $N(2)$ und den Zeitpunkt τ an dem $N(\tau)/K = 0.75$.

Aufgabe 2

Ein elektrisch geladenes Teilchen mit konstanter Ladung bewege sich entlang der x–Achse in einem Elektrischen Feld mit elektrischer Feldstärke $E(x) = \frac{1}{x^3}$. Die Bewegungsgleichung des Teilchens lautet dann
$$x''(t) = \frac{\gamma}{x(t)^3}$$
mit $\gamma > 0$.
(a) Lösen Sie diese Gleichung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0 > 0$ und $x'(0) = v_0$.
Hinweis: beachten Sie die möglichen Vorzeichen von v_0.
(b) Skizzieren Sie die Lösung für die Werte $x_0 = 1$, $v_0 = -0.5$.

Rückseite beachten

Aufgabe 3

Auf einem (abgegrenzten) Markt werde ein High-Tech-Haushaltsgerät erstmalig angeboten (zum Zeitpunkt $t = 0$). Die theoretisch mögliche Absatz-Obergrenze (Sättigungsmenge) betrage in diesem Markt x_s (= 100.000 ME).
Die bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$ insgesamt verkaufte Menge werde mit $x(t)$ bezeichnet.
Gesucht ist die Funktionsgleichung der Absatz-Zeit-Funktion $x(t)$, wenn gilt:

- In jedem Zeitpunkt $t > 0$ ist die Zahl der in der nächsten Zeiteinheit verkauften Stücke (d.h. die zeitliche Änderung $\dot{x}(t)$ des Absatzes) proportional zum Abstand $x_s - x(t)$ zwischen Sättigungsmenge x_s und kumulierter Absatzmenge $x(t)$.

  (Dies bedeutet: Je näher der kumulierte Absatz $x(t)$ an die Sättigungsmenge x_s stößt, desto schwieriger (und somit kostspieliger) wird es weitere Stücke abzusetzen.)

- Im Zeitpunkt $t = 12$ sind bereits 20.000 ME verkauft.

(a) Wie lautet die Absatz-Zeit-Funktion $x(t)$? Fertigen Sie eine Skizze.
(b) Nach welcher Zeit sind 80% der höchstens absetzbaren Stücke verkauft?
(c) Angenommen, der Deckungsbeitrag (Verkaufserlös abzüglich variable Kosten) für jedes Gerät betrage 10 GE (ohne Berücksichtigung der mit dem Absatz verbundenen Kosten). Die mit dem Absatz verbundenen Kosten betragen pro Zeiteinheit einheitlich 1.000 GE. Man ermittle diejenige kumulierte Absatzmenge x, für die gilt: Das nächste verkaufte Stück verursacht genauso hohe Absatz-Kosten, wie es Deckungsbeitrag erwirtschaft.