Prof. Dr. P. Takáč
Dr. M. Grüttmüller
Dr. S.-Z. Huang
Dr. M. Ulm

WiS 2003/2004
18.11.2003
– Blatt 6 –

Übungen zu:
Analysis III

Abgabetermin 25.11.2003

Aufgabe 1

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung:

$$(*) \qquad y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^{\alpha},$$

wobei α eine Konstante und a, b zwei gegebene Funktionen sind.
(a) Finde eine geeignete Zahl β derart, dass der Ansatz $y = z^{\beta}$ die Gleichung (*) auf die Standardform $z'(x) = a_1(x)z(x) + b_1(x)$ führt.
(b) Bestimme die allgemeine Lösung von (*) durch obigen Ansatz.

Aufgabe 2

Beweisen Sie den folgenden Satz.
Satz: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \to M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

besitze die spezielle Lösung $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$. Im Teilintervall $J \subset I$ gelte $\varphi_2 \neq 0$ für alle $x \in J$. Ferner seien $u, g : J \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, $g \not\equiv 0$, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$g' = (a_{11} - a_{21}\frac{\varphi_1}{\varphi_2})g \quad \text{und} \quad u' = \frac{a_{21}}{\varphi_2}g.$$

Dann ist die Funktion $\psi : J \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\psi(x) = u(x)\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine zweite, von φ linear unabhängige Lösung.

Rückseite beachten

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}_+^*$:

$$y_1' = -y_1 + \frac{1}{x}y_2 + \ln x + \frac{1}{x}, \tag{1}$$

$$y_2' = (1-x)y_1 + y_2 + (x-1)\ln x. \tag{2}$$

Hinweis: Nutzen Sie den Satz aus der vorhergehenden Aufgabe mit der speziellen Lösung der homogenen Differentialgleichung $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ um die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu erhalten. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu erhalten, ist die Methode der Variation der Konstanten hilfreich.