Prof. Dr. P. Takáč
Dr. M. Grüttmüller
Dr. S.-Z. Huang
Dr. M. Ulm

WiS 2003/2004
25.11.2003
– Blatt 7 –

Übungen zu:
Analysis III

Abgabetermin 2.12.2003

Reduktion der Ordnung
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b : I \to \mathbb{K}$ zwei stetige Funktionen. Weiter sei $\varphi : I \to \mathbb{K}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

mit $\varphi(x) \neq 0$. Dann erhält man eine zweite, von φ unabhängige Lösung $\psi : I \to \mathbb{K}$ durch den Ansatz $\psi(x) = \varphi(x)u(x)$, wobei u eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung

$$u''(x) + \left(2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x)\right) u'(x) = 0$$

ist.

Aufgabe 1

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(x+1)\, y''(x) + (x-1)\, y'(x) - 2y(x) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, daß $y(x) = e^{-x}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Bestimmen Sie eine zweite, linear unabhängige Lösung der Gleichung.

(c) Bestimmen Sie die Wronski-Determinante der beiden Lösungen.

Rückseite beachten

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

(a)

$$(x+1)\,y''(x) + 2xy'(x) - 4y(x) = \left(2 + x + 3x^2\right) e^x$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

(b)

$$x^2\,(1-2x)\,y''(x) + 4x\,(1-x)\,y'(x) + 2\,(1+2x)\,y(x) = 4 + 6x$$
$$y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$$

Anleitung: Finden Sie eine Lösung der homogenen Gleichung mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ bzw. $y(x) = x^{\alpha}$. Ermitteln Sie eine zweite Lösung der homogenen Gleichung durch Reduktion der Ordnung. Schliesslich berechnen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten.

Aufgabe 3

Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = \sin x.$$