PRÜFUNG **Mathematik für WIN** **25. Juli 2002**

Vorlesung: Prof. Dr. H.-D. Gronau
Übungen: E. Neidhardt, Dr. R. Labahn, Dr. M. Grüttmüller

Zugelassene Arbeitsmittel: Eigene Mitschriften aus Vorlesung und Übung, Taschenrechner, ein Buch (z.B. Formelsammlung), Schreib- und Zeichengeräte

NICHT zugelassen: Notebooks, PDAs, Handys (vor Beginn vollständig ausschalten!)

Bestanden: ≥ 20 Punkte von 50 möglichen Punkten

Bitte den Namen und die Matrikelnummer auf jedes Blatt schreiben. Bitte die Aufgaben 1–4, die Aufgaben 5–7 und die Aufgaben 8–10 auf getrennte Blätter schreiben.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a.) Berechnen Sie die Zahl $(4+2i)^4$ und kennzeichnen Sie diese Zahl in der Gaußschen Zahlenebene.

b.) Geben Sie eine Zerlegung von $x^3 + x^2 + 8x - 10$ in Linearfaktoren mit Koeffizenten aus $\mathbb{C}$ an.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie alle Lösungen $\underline{x} \in \mathbb{F}_5^3$ des folgenden Gleichungssystems mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Punkte gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene durch die Punkte A, B, C an und berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2} \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Bestimmen und klassifizieren Sie alle Extremstellen. Wie verhält sich die Funktion im Unendlichen? Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben ist eine Kurve C in Parameterform $x = t$ und $y = \sqrt{(t-1)^3}$ mit $2 \leq t \leq 10$. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve C.

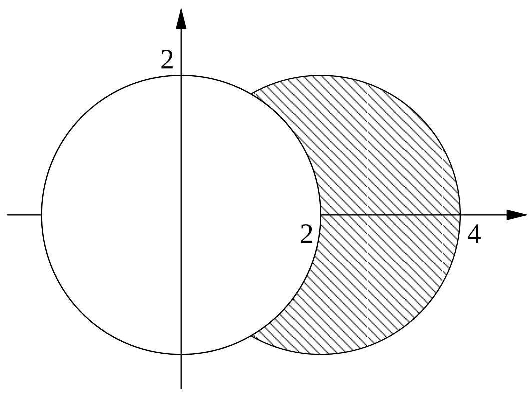
Bitte umblättern

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von $f(x,y)$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Gegeben ist der ebene Bereich B (schraffiert in der Skizze), der innerhalb des Kreises $x^2+y^2 = 4x$ aber außerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = 4$ liegt. Auf B ist eine stetige Dichtefunktion $\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ definiert. Berechnen Sie die Gesamtmasse des Bereiches.



Aufgabe 8 (5 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad \text{mit} \;\; y(0) = 2 \;\; \text{und} \;\; y(1) = 0.$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Ein Schachturnier mit 14 Spielern soll so organisiert werden, dass je zwei Spieler genau ein Spiel miteinander spielen und an jedem der 13 Spieltage je 7 Spiele 'parallel' ausgetragen werden. Man gebe einen solchen Spielplan an !

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Man bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ des folgenden Systems !

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \bmod 4, \\ x &\equiv 8 \bmod 9, \\ x &\equiv 2 \bmod 5. \end{aligned}$$

Wichtig: Bitte den Namen und die Matrikelnummer auf jedes Blatt schreiben.