PRÜFUNG **Mathematik für WIW** **13. Februar 2002**

Vorlesung: Prof. Dr. H.-D. Gronau **Übungen:** E. Neidhardt, Dr. M. Grüttmüller

Zugelassene Arbeitsmittel: Eigene Mitschriften aus Vorlesung und Übung, Taschenrechner, ein Buch (z.B. Formelsammlung), Schreib- und Zeichengeräte

NICHT zugelassen: Notebooks, Handys (vor Beginn vollständig ausschalten!)

Bitte den Namen und die Immatrikulationsnummer auf jedes Blatt schreiben.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^6 - z^2 = 0$. Stellen Sie die Lösungen als Vektoren in der Gaußschen-Zahlenebene dar.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Entscheiden und begründen Sie für jedes der folgenden Gleichungssysteme, ob sie keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ haben. Hinweis: Die Lösungen selber müssen nicht berechnet werden.

$$\text{a.)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & 11 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{-1}{7} \end{pmatrix} \qquad \text{b.)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ -1 & 5 & -13 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{-5}{7} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrix und zu einem Eigenwert (Ihrer Wahl) die dazugehörigen Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sind die Ebenen $E_1 : (x; y; z)^T = (4; 0; 1)^T + s(2; 1; 4)^T + t(-2; 1; -2)^T$ und $E_2 : x + y + z - 1 = 0$. Berechnen Sie den Normaleneinheitsvektor von E_1 und geben Sie die Hessesche Normalform von E_1 an. Welchen Abstand hat der Punkt $Q(3; -2; -2)$ von der Ebene E_1? Berechnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Zahlenfolgen.

$$\text{a.)} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 25n + 1}{6n^2 + 7} \qquad \text{b.)} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(17n^2 + 2n)}{2n} \qquad \text{c.)} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

Bitte umblättern

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{falls } 0 \leq x \leq 4, \\ (x+2)^2 - 3 & \text{falls } -4 \leq x < 0. \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Bestimmen und klassifizieren Sie alle Extremstellen (nach globalen/lokalen Minima/Maxima).

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für die k-te Ableitung ($k \geq 1$) der Funktion $f(x) = (5x+3)e^x$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = (5x + 5k + 3)e^x.$$

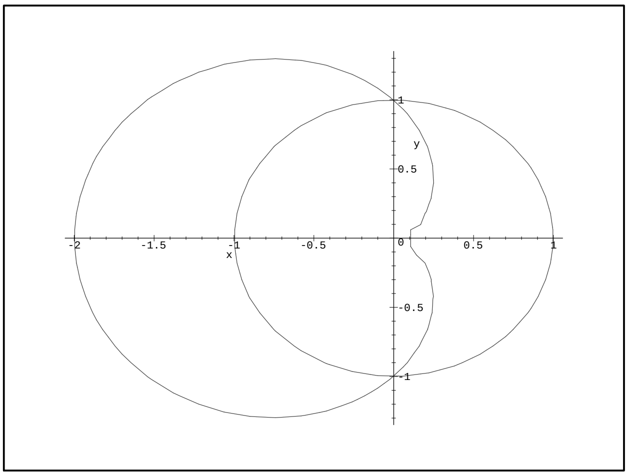
Stellen Sie die Taylorreihe von $(5x+3)e^x$ für $x_0 = 0$ auf.

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Eine Bankkundin möchte ihr gesamtes Geld so auf zwei zur Auswahl stehende Kapitalanlagen (beide mit gleicher Renditeerwartung) verteilen, dass ihr Risiko minimal wird. Das Risiko wird durch die Funktion $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2$ beschrieben, wobei die Variable x_i, $i = 1, 2$, den Anteil von Anlage i am Portfolio angibt. Damit ergibt sich als eine Nebenbedingung $x_1 + x_2 = 1$. Gibt es aus dem Sachverhalt heraus weitere Bedingungen an die Variablen x_1, x_2? Wie müssen die Anteile x_i für minimales Risiko gewählt werden?

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die vom Einheitskreis und von der Kurve $x = \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)$ begrenzt wird und ausserhalb des Einheitskreises liegt.



Aufgabe 10 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' - 4y' = 3\cos x$.

Wichtig: Bitte den Namen und die Immatrikulationsnummer auf jedes Blatt schreiben.