1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Definition 1 Eine Aussage ist ein sinnvoller Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

⇒ Aussageform

Definition 2 Als Definitionsmenge einer Aussageform $p(x)$ bezeichnet man eine Menge D mit der Eigenschaft, dass für alle Elemente $x \in D$ die Aussageform $p(x)$ zu einer Aussage wird.

⇒ All-Quantor $\forall$, Existenz-Quantor $\exists$

⇒ Operationen mit Aussagen, Wahrheitstafel

Definition 3 Als Negation $\bar{p}$, Konjunktion (und) $p \wedge q$, Disjunktion (oder) $p \vee q$, Implikation $p \rightarrow q$ bzw. Äquivalenz $p \leftrightarrow q$ der Aussagen p und q bezeichnet man Aussagen mit der folgenden Wahrheitstafel:

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

⇒ Gesetze der Aussagenlogik (de Morgan, Transitivität)

⇒ Tautologie, Kontradiktion

⇒ Der direkte Beweis

⇒ Die vollständige Induktion

⇒ Der indirekte Beweis

1.2 Mengenlehre

Definition 4 *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die zu einer Menge zusammengefassten Objekte heißen Elemente der Menge.*

Achtung ! Jedes Element kann in einer Menge nur einmal vorkommen!

⇒ $x \in M$ (Elemente - kleine Buchstaben, Mengen - große Buchstaben)

⇒ Definition von Mengen, Venn-Diagramme

Definition 5 *Zwei Mengen A und B heißen gleich, und man schreibt $A = B$, wenn beide Mengen genau dieselben Elemente besitzen. Sonst gilt $A \neq B$.*

⇒ Mengenrelationen und -operationen

Definition 6 *Gilt für jedes Element $x \in A$ auch $x \in B$, so heißt A Teilmenge von B , geschrieben: $A \subseteq B$.*

Definition 7 *Die Durchschnittsmenge $A \cap B$, die Vereinigungsmenge $A \cup B$ und die Differenzmenge $A \setminus B$ für zwei Mengen A und B werden folgendermaßen definiert:*

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

⇒ leere Menge $\emptyset$, komplementäre Menge, disjunkte Mengen

⇒ Gesetze für Mengenoperationen, Kreuzprodukt $M \times N$

⇒ Potenzmenge 2^V , Menge der k -elementigen Teilmengen $\binom{V}{k}$

⇒ Mächtigkeit einer Menge

Achtung ! $A = B$ beweist man durch die beiden Beweise $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

1.3 Kombinatorik

Definition 8 Die Fakultät $n!$ wird für natürliche Zahlen n folgendermaßen definiert:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 & \text{für } n > 0, \\ 1 & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

⇒ Anordnungen, Permutationen

Satz 1 Die Anzahl der Permutationen von n Elementen ist $p_n = n!$

Definition 9 Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ wird für natürliche Zahlen n und k mit $0 \leq k \leq n$ folgendermaßen definiert:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} & \text{für } 0 < k < n, \\ 1 & \text{für } k = 0 \text{ oder } k = n. \end{cases}$$

Satz 2 Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ erfüllen für natürliche n und k mit $0 \leq k \leq n$ folgende Gesetze:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Achtung ! $\binom{n}{k} = 0$ für $k < 0$ oder $k > n$.

⇒ Auswahlen und Anordnungen

⇒ Kombinationen, Variationen (mit und ohne Wiederholungen)

Achtung ! 'mit Wiederholungen' heißt: Wiederholungen sind möglich, nicht notwendig !

Satz 3 Die Anzahl der Kombinationen, Variationen (mit und ohne Wiederholungen) von n Elementen zur k -ten Klasse ist:

	ohne Wiederholungen	mit Wiederholungen
Kombinationen	$K_{n,k} = \binom{n}{k}$	$K_{n,k}^W = \binom{n+k-1}{k}$
Variationen	$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$	$V_{n,k}^W = n^k$

Achtung ! $V_{n,n} = p_n$.

Satz 4 (Binomischer Lehrsatz) Für jede natürliche Zahl n und je zwei Elemente x und y eines Körpers (z.B. $\mathbb{R}$) gilt:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i = (x+y)^n.$$

Folgerung 1 Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

Folgerung 2 Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i = 0.$$

⇒ Wege im Gitter, Pascalsche Dreieck

Satz 5 Für alle natürliche Zahlen n , k und m mit $0 \leq k \leq n$ und $0 \leq m \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n-m}{k-i}.$$

Satz 6 Für alle natürliche Zahlen n , k und m mit $0 \leq k \leq n$ und $0 \leq m \leq n-k$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m+i}{i} \binom{n-m-i-1}{k-i}.$$

1.4 Relationen

Definition 10 Eine binäre Relation R auf $A \times B$ ist eine Teilmenge von $A \times B$.

$\Rightarrow$ Schreibweisen, z.B.: $xRy, a \leq b, m = n, w > z, p|q$

$\Rightarrow x \not R x$

Eigenschaften von Relationen auf $A \times A$	
Eigenschaft	Definition
reflexiv	xRx für jedes $x \in A$
irreflexiv	$x \not R x$ für jedes $x \in A$
symmetrisch	$xRy \rightarrow yRx$ für alle $x, y \in A$
antisymmetrisch	$x \neq y, xRy \rightarrow y \not R x$ für alle $x, y \in A$
transitiv	$xRy, yRz \rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in A$

Wichtige Relationen auf $A \times A$	
Typ der Relation	Definition
Äquivalenzrelation	reflexiv, symmetrisch, transitiv
Halbordnung	reflexiv, antisymmetrisch, transitiv
Ordnung (lin. Ordnung)	Halbordnung und xRy oder yRx für alle $x, y \in A$

Satz 7 Jede Äquivalenzrelation auf $A \times A$ definiert auf A eine Klasseneinteilung (Äquivalenzklassen).

1.5 Zahlenbereiche

⇒ natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$

⇒ ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{x : -x \in \mathbb{N}^+\}$,

⇒ $\mathbb{Z}^+$

⇒ rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{x : \exists a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, x = \frac{a}{b}\}$

Achtung ! Äquivalenzrelation

⇒ Dezimalbrüche, endliche, unendliche, periodische

⇒ reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{\text{alle Dezimalbrüche}\} =$
 $= \mathbb{Q} \cup \{\text{nichtperiodische Dezimalbrüche}\}$

⇒ komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ etwas später

1.6 Zahlentheorie

Definition 11 Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir sagen, a teilt b (oder ' a ist Teiler von b ' oder ' b ist teilbar durch a '), falls es eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = a \cdot c$.

Definition 12 Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ heißt Primzahl, falls sie nur 1 und sich selbst als Teiler aus $\mathbb{N}$ hat.

Regeln:

1. Falls $a|b$ und $c \in \mathbb{Z}$, so gilt $a|bc$.
2. Falls $a|b$ und $b|c$, so gilt $a|c$.
3. Falls $a|b$ und $a|c$, so gilt $a|b + c$ und $a|b - c$.

⇒ Halbordnung

Satz 8 (Euklid) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Satz 9 (Fundamentalsatz der Arithmetik) Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ hat eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmte Darstellung als Produkt von Primzahlen.

⇒ größte gemeinsame Teiler (ggT) (a, b) der Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$

Algorithmus 1 (Euklidischer Algorithmus) Es seien a und b zwei natürliche Zahlen mit $a > b > 0$. Setze $r_0 = a$ und $r_1 = b$ und bilde r_i für $i = 2, 3, \dots$ gemäß

$$r_{i-1} = q_i \cdot r_i + r_{i+1} \text{ mit } r_i > r_{i+1} \geq 0$$

bis erstmalig für einen Rest $r_{i+1} = 0$ gilt.

Satz 10 Der letzte von 0 verschiedene Rest im Euklidischen Algorithmus ist der größte gemeinsame Teiler (a, b) zweier natürlicher Zahlen a und b .

Folgerung 3 Der größte gemeinsame Teiler (a, b) zweier Zahlen a und b lässt sich als Linearkombination von a und b darstellen, d.h. es gibt zwei ganze Zahlen m und n mit $(a, b) = ma + nb$.

Folgerung 4 Die natürliche Zahl 1 lässt sich genau dann als Linearkombination von a und b darstellen, wenn $(a, b) = 1$.

Definition 13 Gegeben seien die drei ganzen Zahlen a , b und m mit $m > 0$. Wir sagen 'a ist kongruent zu b modulo m', falls die Differenz $a-b$ durch m teilbar ist.

Lemma 1 $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ gilt:

1. $a \equiv a \pmod{m}$,
2. $a \equiv b \pmod{m} \iff b \equiv a \pmod{m}$,
3. $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$.

$\Rightarrow$ Äquivalenzrelation

Lemma 2 $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ gilt:

1. Aus $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$ folgt $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ und $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.
2. Aus $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$ folgt $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.
3. Aus $a \equiv b \pmod{m}$ folgt $a \equiv b \pmod{d}$ für jeden Teiler d von m .
4. Aus $a \equiv b \pmod{m}$ und $a \equiv b \pmod{n}$ mit $(m, n) = 1$ folgt $a \equiv b \pmod{m \cdot n}$.

$\Rightarrow$ In den Restklassen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kann man 'normal' addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Achtung ! Dividieren !

Satz 11 Die Elemente von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, die ein multiplikatives Inverses haben, sind genau die Zahlen, die relativ prim zu m sind, d.h. die Zahlen a , für die es eine Zahl b mit $a \cdot b \equiv 1 \pmod{m}$ gibt, sind genau die Zahlen mit $(a, m) = 1$.

Folgerung 5 Ist m eine Primzahl, so hat jedes Element $a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} - \{0\}$ ein multiplikatives Inverses, d.h. für jede solche Zahl a gibt es eine Zahl b mit $a \cdot b \equiv 1 \pmod{m}$.

Satz 12 (kleiner Satz von Fermat) Ist p eine Primzahl, so gilt für jede ganze Zahl a :

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Falls a nicht durch p teilbar ist, so gilt:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

1.7 Abbildungen, Funktionen

Definition 14 *A und B seien Mengen. Eine Funktion von A nach B, $f : A \rightarrow B$, ist eine Relation mit der Eigenschaft: Zu jedem $x \in A$ steht ein eindeutig bestimmtes $y \in B$ in Relation.*

⇒ Notation: $y = f(x)$

⇒ Definitionsbereich, Bildbereich, Kompositum

Eigenschaften von Funktionen $f : A \rightarrow B$		
Eigenschaft		Definition
surjektiv	auf	$f(A) = B$
injektiv	eindeutig	$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ für alle $x, x' \in A$
bijektiv	eindeutig und auf	surjektiv und injektiv

⇒ inverse Funktion f^{-1} (Umkehrfunktion)

2 Algebraische Strukturen

2.1 Operationen

Definition 15 Eine (binäre) Operation (Verknüpfung) $\circ$ auf einer Menge M ist eine Funktion $M \times M \rightarrow M$. Das Element in M , das (x, y) zugeordnet wird, heißt $x \circ y$.

⇒ Operationstafel (Verknüpfungstafel)

⇒ Beispiele

Eine Operation $\circ$	
ist <i>assoziativ</i> ,	wenn $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ für alle $x, y, z \in M$.
ist <i>kommutativ</i> ,	wenn $x \circ y = y \circ x$ für alle $x, y \in M$.
ist <i>distributiv</i> über der Oper. $*$,	wenn $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ für alle $x, y, z \in M$.
hat ein <i>neutrales</i> Element e ,	wenn $x \circ e = e \circ x = x$ für alle $x \in M$.

Das Element $x \in M$ hat ein *Inverses* x^{-1} , wenn $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

2.2 Gruppen

Definition 16 Eine Gruppe $(M, \circ)$ ist eine Menge M mit einer Operation $\circ$ auf M mit folgenden Eigenschaften:

1. *assoziativ*,
2. *es existiert ein neutrales Element e ,*
3. *jedes Element $x \in M$ hat ein eindeutiges Inverses x^{-1} .*
4. *Falls $(M, \circ)$ kommutativ ist, heißt $(M, \circ)$ abelsche Gruppe (oder kommutative Gruppe).*

⇒ Beispiele

⇒ Addition: Nullelement, additives Inverses $-x$

⇒ Multiplikation: Einselement, multiplikatives Inverses x^{-1}

2.3 Körper

Definition 17 Ein Körper $(M, \circ, *)$ ist eine Menge M mit zwei Operation $\circ$ und $*$ auf M mit folgenden Eigenschaften:

1. $(M, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. $(M - \{0\}, *)$ ist eine abelsche Gruppe.
3. Es gilt das Distributivgesetz.

⇒ oft: $\circ$ - + - Addition

⇒ oft: $*$ - · - Multiplikation

⇒ 0 - Nullelement = neutrales Element bzgl. der Addition

⇒ 1 - Einselement = neutrales Element bzgl. der Multiplikation

⇒ Beispiele

Achtung ! Bezeichnung $\mathbb{F}_n$ für Körper mit n Elementen.

⇒ Beispiele für endliche Körper:

$\mathbb{F}_p = (\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, falls p eine Primzahl ist.

$\mathbb{F}_4 = (M = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}, +, \cdot)$ mit

+	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$
1	1	0	$\alpha+1$	α
α	α	$\alpha+1$	0	1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	α	1	0

·	1	α	$\alpha+1$
1	1	α	$\alpha+1$
α	α	$\alpha+1$	1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	1	α

⇒ Isomorphie

Achtung ! $\mathbb{F}_n$ existiert genau für Primzahlpotenzen n und ist dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

3 Differenzgleichungen

⇒ Beispiele (arithmetische Folge, geometrische Folge, Fibonacci-Folge)

Definition 18 Eine Differenzgleichung der Ordnung m ist eine rekursive Beziehung

$$y_{n+m} = F(y_{n+m-1}, y_{n+m-2}, \dots, y_{n+1}, y_n),$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, wobei F eine Funktion in m Variablen ist.

⇒ Beispiel einer nicht-linearen Differenzgleichung

⇒ homogen, inhomogen

Definition 19 Eine lineare Differenzgleichung der Ordnung m ist eine rekursive Beziehung

$$y_{n+m} + a_{n+m-1}y_{n+m-1} + a_{n+m-2}y_{n+m-2} + \dots + a_{n+1}y_{n+1} + a_n y_n = c_n,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, mit $a_i \in K$, wobei K ein beliebiger Körper ist. Gesucht sind alle Folgen $\{y_i\} \in K$, die die Differenzgleichung lösen.

⇒ Beispiel einer linearen Differenzgleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten

Achtung ! Lineare Differenzgleichungen sind immer lösbar; $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ sind frei wählbar.

⇒ $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ heißen Anfangswerte

⇒ Es bezeichne $\mathbf{y}$ abkürzend die Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

⇒ Abkürzende Schreibweise für die Differenzgleichung:

$$L(\mathbf{y}) = c_n,$$

$L(\mathbf{y})$ bezeichnet die linke Seite der Gleichung.

Satz 13 (Struktursatz für lineare Differenzgleichungen) *Mit der Kurzschreibweise gilt:*

a) *Der Operator L ist linear:*

$$L(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = L(\mathbf{y}) + L(\mathbf{z}),$$

$$L(\alpha \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot L(\mathbf{y}) \quad \forall \alpha \in K.$$

b) *Sei $M = \{\mathbf{y} : L(\mathbf{y}) = 0\}$, d.h. die Menge der Lösungen der homogenen Differenzgleichung:*

$$x, y \in M \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M \quad \forall \alpha, \beta \in K.$$

c) *Ist $\bar{y}$ eine (sogenannte spezielle) Lösung der inhomogenen Gleichung, so erhält man alle Lösungen der inhomogenen Gleichung durch Addition der aller Lösungen der homogenen Gleichung zu $\bar{y}$.*

Definition 20 *Eine lineare Differenzgleichung der Ordnung m mit konstanten Koeffizienten ist eine rekursive Beziehung*

$$y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + a_{m-2}y_{n+m-2} + \dots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = c_n,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, mit $a_i \in K$, wobei K ein beliebiger Körper ist. Gesucht sind alle Folgen $\{y_i\} \in K$, die die Differenzgleichung lösen.

Satz 14 (Lösung der homogenen linearen Differenzgl.) *Die Differenzgleichung*

$$y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + a_{m-2}y_{n+m-2} + \dots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = 0,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, wird durch den Ansatz $y_n = \lambda^n$ mit $\lambda \in K$ gelöst. λ erfüllt die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + a_{m-2}\lambda^{m-2} + \dots + \lambda y_1 + a_0 = 0.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ seien die Lösungen. Dann ist die (allgemeine) Lösung der homogenen Differenzgleichung:

$$y_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \dots + \alpha_m \lambda_m^n$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$\Rightarrow$ Lösung der charakteristischen Gleichung (falls nicht alle Lösungen in K liegen oder die Lösungen nicht paarweise verschieden sind)

$\Rightarrow$ Methoden zum Bestimmen einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung:

- a) Raten, Knobel
- b) sukzessives Berechnen
- c) geeignete Ansätze (Polynom, trigonometrischer Ausdruck)
- d) Variation der Konstanten
- e) Faltungssummen (hier nicht).

4 Komplexe Zahlen

4.1 Definition, Gauß'sche Zahlenebene

⇒ imaginäre Einheit i : $i^2 = -1$

⇒ $Re(z)$, $Im(z)$, Konjugiertes $\bar{z}$

⇒ Gauß'sche Zahlenebene, Betrag $|z|$, Argument $arg(z)$

⇒ Rechenregeln

Satz 15 *Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bildet mit der 'üblichen' Addition und Multiplikation einen Körper.*

4.2 Polarkoordinaten-Darstellung

⇒ $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$

⇒ Rechenregeln in der Polarkoordinaten-Darstellung

Satz 16 (De-Moivre-Formel)

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

4.3 Fundamentalsatz der Algebra

Satz 17 (Fundamentalsatz der Algebra) *Die Gleichung*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

vom Grad n ($a_n \neq 0$) hat in $\mathbb{C}$ genau n Wurzeln (Vielfachheiten mitgezählt). Sind $z_1, z_2, \dots, z_n$ die Wurzeln, dann gilt:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Satz 18 *Die Gleichung*

$$z^n = a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

hat genau die Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

mit $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

5 Lineare Algebra

5.1 Matrizen

Definition 21 Eine Matrix ist ein rechteckiges Schema von Elementen (Zahlen, Elemente eines Körpers, auch Funktionswerte, etc.)

⇒ Format $m \times n$, Zeilen, Spalte, $a_{i,j}$

⇒ $m = n$ - quadratische Matrizen

⇒ Zwei Matrizen sind gleich, $A = B$, wenn sie das gleiche Format haben und $a_{i,j} = b_{i,j}$ für alle i, j gilt.

Definition 22 Für zwei Matrizen $A = (a_{i,j})$ und $B = (b_{i,j})$ vom gleichen Format ist die Summe $C = (c_{i,j})$ definiert durch: $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Satz 19 Die Matrizen vom Format $m \times n$ bilden mit der Addition eine abelsche Gruppe.

⇒ Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar λA .

Definition 23 Für zwei verkettete Matrizen $A = (a_{i,j})_{m,n}$ und $B = (b_{i,j})_{n,k}$ wird das Produkt $C = (c_{i,j})_{m,k}$ definiert durch:

$$c_{i,j} = \sum_{l=1}^n a_{i,l} \cdot b_{l,j}.$$

Achtung ! Die Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ.

⇒ Die Matrix-Multiplikation ist assoziativ.

Satz 20 Für α und β und $n \times k$ Matrizen B und C und eine $m \times n$ Matrix A gilt:

$$A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC.$$

Folgerung 6 Für quadratische Matrizen A, B und C :

$$A(B + C) = AB + AC$$

und

$$(B + C)A = BA + CA.$$

⇒ Einheitsmatrix I

Satz 21 Falls eine Matrix eine (multiplikative) Inverse hat, so ist diese eindeutig.

⇒ multiplikatives Inverse

Satz 22 Falls die Matrizen A und B (multiplikative) Inversen besitzen, so hat auch $C = AB$ eine Inverse und es gilt

$$C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

.

⇒ transponierte Matrix A^T

Satz 23 Falls die Matrizen A und B verkettet sind, so gilt

$$(AB)^T = B^T A^T$$

.

Satz 24 Falls A^{-1} existiert, so gilt

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

.

5.2 Determinanten

⇒ Vorzeichen (σ) einer Permutation

Definition 24 Die Determinante einer quadratischen $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$ wird definiert durch

$$\det A = |A| = \sum_{\pi} \sigma(\pi) a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n},$$

wobei die Summation über alle $n!$ Permutationen $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ von $\{1, 2, \dots, n\}$ erstreckt wird.

⇒ Beispiele, Sarrus'sche Regel für $n = 3$

Satz 25 Enthält eine Matrix A eine Nullzeile (Nullspalte), so gilt

$$|A| = 0.$$

Satz 26 Der Wert einer Determinante ändert das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen (Spalten) ausgetauscht werden.

Satz 27 Enthält eine Matrix A zwei gleiche Zeilen (Spalten), so gilt

$$|A| = 0.$$

Satz 28 Die Matrix D entstehe aus der Matrix A durch Multiplikation jedes Elementes der i -ten Zeile (Spalte) mit k . Dann gilt

$$|D| = k|A|.$$

Satz 29 Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile (Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte) addiert wird.

⇒ Untermatrix $A_{i,j}$

Satz 30 (Entwicklungssatz, bzgl. Zeile i) Für jede $n \times n$ -Matrix $A = (a_{i,j})$ gilt:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} |A_{i,j}|.$$

Satz 31 (Entwicklungssatz, bzgl. Spalte j) Für jede $n \times n$ -Matrix $A = (a_{i,j})$ gilt:

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} |A_{i,j}|.$$

Folgerung 7 Die Determinante einer Dreiecksmatrix ($a_{i,j} = 0$ falls $i > j$) ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente.

Satz 32 Für jede $n \times n$ -Matrix $A = (a_{i,j})$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{k,j} |A_{i,j}| = 0,$$

falls $i \neq k$.

Satz 33 Für je zwei $n \times n$ -Matrizen A und B gilt:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Definition 25 Für jede $n \times n$ -Matrix $A = (a_{i,j})$ wird die zu A adjungierte Matrix $\text{adj}(A)$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) &= ((-1)^{i+j} |A_{j,i}|) = \\ &= \begin{pmatrix} +|A_{1,1}| & -|A_{2,1}| & \cdots & (-1)^{n+1} |A_{n,1}| \\ -|A_{1,2}| & +|A_{2,2}| & \cdots & (-1)^{n+2} |A_{n,2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} |A_{1,n}| & (-1)^{2+n} |A_{2,n}| & \cdots & (-1)^{n+n} |A_{n,n}| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Satz 34 Für jede $n \times n$ -Matrix A gilt:

$$\text{adj}(A) \cdot A = A \cdot \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I.$$

Satz 35 Eine $n \times n$ -Matrix $A = (a_{i,j})$ besitzt genau dann eine inverse Matrix A^{-1} , wenn $|A| \neq 0$. Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A).$$

Definition 26 Der Determinantenrang einer Matrix A ist die größte Zahl r , so dass A eine r -reihige Untermatrix mit $|A| \neq 0$ enthält.

$\Rightarrow$ reguläre Matrizen, singuläre Matrizen

Definition 27 Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ heißen linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ hat.

Lemma 3 Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär, $|A| \neq 0$, wenn die Zeilen (Spalten) linear unabhängig sind.

Definition 28 Der Zeilenrang einer Matrix A ist die größte Zahl r , so dass A r linear unabhängige Zeilen(vektoren) enthält.

Definition 29 Der Spaltenrang einer Matrix A ist die größte Zahl r , so dass A r linear unabhängige Spalten(vektoren) enthält.

Satz 36 Für jede Matrix A stimmen Determinantenrang, Zeilenrang und Spaltenrang überein.

5.3 Lineare Gleichungssysteme

⇒ allgemeine Form

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\dots = \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

⇒ homogenes lineares Gleichungssystem

⇒ inhomogenes lineares Gleichungssystem

Definition 30 $L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b})$ bezeichne die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Satz 37 Ist $\mathbf{x}_0$ eine (beliebige) Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, so gilt

$$L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}) = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}' : \mathbf{x}' \in L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0})\}.$$

(Die allgemeine Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems setzt sich aus einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems und der allgemeinen Lösung des zugehörigen linearen homogenen Gleichungssystems zusammen.)

⇒ Koeffizientenmatrix A

⇒ erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$

Satz 38 Ist $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\mathbf{b})$, so ist das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar. Ist $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|\mathbf{b})$, so ist das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nicht lösbar.

Satz 39 Ist A eine $m \times n$ -Matrix mit $\text{rg}(A) = r$, so besteht $L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0})$ aus allen Linearkombinationen von $n - r$ linear unabhängigen Lösungen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n-r}$, d.h..

$$L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}) = \{\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + \dots + \lambda_{n-r} \mathbf{y}_{n-r}\}.$$

5.4 Gauß-Algorithmus

Satz 40 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ändert sich nicht, wenn folgende Operationen ausgeführt werden:

- Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\lambda \neq 0$,
- Addition des λ -fachen der i -ten Gleichung zur j -ten Gleichung, $i \neq j$.

⇒ Gauß-Schritte

Satz 41 Die am Ende des Gauß-Algorithmus erhaltene Trapezgestalt des Gleichungssystems hat folgende Form:

$$\begin{aligned}
 a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + a'_{1,3}x_3 + \dots + a'_{1,r}x_r + \dots + a'_{1,n}x_n &= b'_1 \\
 a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \dots + a'_{2,r}x_r + \dots + a'_{2,n}x_n &= b'_2 \\
 a'_{3,3}x_3 + \dots + a'_{3,r}x_r + \dots + a'_{3,n}x_n &= b'_3 \\
 &\dots = \\
 a'_{r,r}x_r + \dots + a'_{r,n}x_n &= b'_r \\
 0 &= b'_{r+1} \\
 0 &= 0 \\
 &\dots = \\
 0 &= 0,
 \end{aligned}$$

wobei $a_{i,i} \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, r$. Eventuell werden Gleichungen ausgetauscht oder Variable umbenannt

Satz 42 Ist in der am Ende des Gauß-Algorithmus erhaltene Trapezgestalt des Gleichungssystems $b'_{r+1} \neq 0$, so hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Satz 43 Ist in der am Ende des Gauß-Algorithmus erhaltene Trapezgestalt des Gleichungssystems $b'_{r+1} = 0$, so ist das Gleichungssystem lösbar. Man erhält **alle** Lösungen, in dem man $x_i = t_i$ für $i = r + 1, r + 2, \dots, n$ setzt, wobei diese t_i beliebige Elemente des zu Grunde liegenden Körpers sind (z.B. $\mathbb{R}$) und die restlichen Variablen x_i mit $i = 1, 2, \dots, r$ einfach ausrechnet.

5.5 Cramersche Regel

Satz 44 *Es sei $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem mit einer $n \times n$ -Koeffizientenmatrix A , die regulär ist. A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, entstehe aus A durch Ersetzen der i -ten Spalte durch $\mathbf{b}$. Dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$*

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}.$$

5.6 Lineare Vektorräume

Definition 31 Eine Menge M mit Elementen $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$ heißt linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$, wenn auf M eine Addition '+' und eine Multiplikation mit einem Skalar (aus $\mathbb{K}$) definiert ist, so dass folgende Gesetze für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in M$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

- $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe,
- $\lambda \mathbf{x} \in M$
- $\lambda(\mu \mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$
- $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$
- $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$
- $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$
- $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

⇒ reelle Vektorräume, Vektorräume über andere Körper

⇒ Linearkombinationen

⇒ lineare Unabhängigkeit, lineare Abhängigkeit

Definition 32 Es sei M ein linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Menge von Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in M$ heißt Basis, wenn folgendes gilt:

- $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ sind linear unabhängig.
- $M = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$.

Satz 45 Je zwei Basen eines linearen Vektorraums M haben dieselbe Anzahl von Elementen.

Definition 33 Die Anzahl der Elemente einer Basis eines linearen Vektorraums M heißt Dimension des Vektorraums.

⇒ $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{Q}^n, G(q)^n$

⇒ Beispiele:

- Standardbasis in $\mathbb{R}^n$,
- $1, x, x^2, \dots, x^n$
- $(1, 2, 3)^T, (1, 3, 1)^T, (2, 2, 2)^T$ von $\mathbb{Z}_5^3$

Definition 34 Eine Teilmenge $M' \subseteq M$ eines linearen Vektorraums M heißt Unterraum (Untervektorraum, Teilraum) von M , falls M' mit den selben Operationen einen Vektorraum bildet.

Satz 46 Eine Teilmenge $M' \subseteq M$ eines linearen Vektorraums M über $\mathbb{K}$ ist ein Unterraum, wenn folgendes gilt:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M'$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M'$,
- $\lambda \mathbf{x} \in M'$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}, \mathbf{x} \in M'$.

⇒ lineare Unterräume im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Satz 47 Es sei $A \cdot \mathbf{x} = 0$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$ mit einer $m \times n$ Koeffizientenmatrix A und $\text{rg}(A) = r$. Dann erzeugen die Zeilen von A einen r -dimensionalen Unterraum S des $\mathbb{K}^n$. Die Lösungen bilden einen $(n - r)$ -dimensionalen Unterraum L des $\mathbb{K}^n$. Außerdem gilt $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = 0$ für je zwei Vektoren $\mathbf{x} \in S$ und $\mathbf{y} \in L$.

5.7 Eigenwerte und Eigenvektoren

⇒ lineare Transformationen $\mathbf{y} = A \cdot \mathbf{x}$

Definition 35 *Das Skalar λ ist ein Eigenwerte der Matrix A , falls es einen Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mit*

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

gibt ! Der Vektor $\mathbf{x}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ .

Folgerung 8 *Die zu einem Eigenwert gehörenden Eigenvektoren bilden einen Vektorraum.*

$$\Rightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

⇒ charakteristisches Polynom $p(\lambda) = |A - \lambda I|$

Satz 48 *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ eine Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ hat, ist, dass λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, d.h.*

$$|A - \lambda I| = 0$$

gilt.

6 Analytische Geometrie

6.1 Skalarprodukt, Vektorprodukt und Spatprodukt

Definition 36 (Skalarprodukt) *Es sei V ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ferner seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ und φ der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ eingeschlossene Winkel mit $0 \leq \varphi \leq \pi$. Das Skalarprodukt von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist diejenige Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$c = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi.$$

$\Rightarrow$ Schreibweise $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

$\Rightarrow$ Schreibweise $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$

$\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{b} = \mathbf{0}$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Eigenschaften:

Für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 > 0$, falls $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,

b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,

c) $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,

d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$,

e) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Satz 49 *Falls $V = \mathbb{R}^n$, d.h. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, so gilt*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Satz 50 (Schwarz'sche Ungleichung) *Sind $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ reelle Zahlen, so gilt*

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Definition 37 (Vektorprodukt) Es sei V ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ferner seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, wobei $\mathbf{a}$ nicht parallel zu $\mathbf{b}$ sei, und φ der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ eingeschlossene Winkel mit $0 < \varphi < \pi$. Das Vektorprodukt von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist derjenige Vektor $\mathbf{c}$ mit

a) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$,

b) $\mathbf{c}$ steht senkrecht auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$,

c) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem.

Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ parallel zueinander, so wird das Vektorprodukt als $\mathbf{0}$ definiert.

$\Rightarrow$ Schreibweise $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Satz 51 Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ. Es gilt vielmehr

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Achtung ! Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ.

Satz 52 Für das Vektorprodukt gilt das Distributivgesetz. Für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ gilt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

Lemma 4 Ist $V = \mathbb{R}^3$ und sind $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ die Einheitsvektoren in x -, y - und z -Richtung, so gilt:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Lemma 5 Für Vektoren $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T, \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)^T \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Definition 38 (Spatprodukt) Es sei V ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ferner seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$. Das Spatprodukt wird definiert durch

$$[\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

$\Rightarrow$ Regeln

6.2 Punkte und Geraden in $\mathbb{R}^2$

Geradengleichungen in $\mathbb{R}^2$:

1. $y = ax + b$, Normalform
2. $y = a(x - x_0) + y_0$, Punktsteigungsform
3. $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, Zweipunkteform
4. $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$, Achsenabschnittsform
5. $ax + by = c$, allgemeine Form
6. $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \lambda \in \mathbb{R}$, Parameterform
7. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$, Normalenform

$\Rightarrow$ Der Vektor $(a, b)^T$ ist Normalenvektor zur Geraden $ax + by = c$

Satz 53 Der Abstand d des Punktes $\mathbf{p} = (a_x, a_y)^T$ von der Gerade $Ax + By = C$ beträgt

$$d = \left| \frac{Aa_x + Ba_y - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

6.3 Punkte, Geraden und Ebenen in $\mathbb{R}^3$

Ebenengleichungen in $\mathbb{R}^3$:

1. $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} + \frac{z}{e} = 1$, Achsenabschnittsform
2. $ax + by + cz = d$, allgemeine Form
3. $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, Parameterform
4. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$, Normalenform

$\Rightarrow$ Der Vektor $(a, b, c)^T$ ist Normalenvektor zur Ebene $ax + by + cz = d$

Satz 54 Der Abstand d des Punktes $\mathbf{p} = (a_x, a_y, a_z)^T$ von der Ebene $Ax + By + Cz = D$ beträgt

$$d = \left| \frac{Aa_x + Ba_y + Ca_z - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

Geradengleichungen in $\mathbb{R}^3$:

1. 2 Ebenengleichungen
2. $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, Parameterform

Satz 55 Der Abstand d der beiden windschiefen Geraden

$g_1 : \mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ und

$g_2 : \mathbf{r} = \mathbf{c} + \mu\mathbf{d}$ beträgt

$$d = \frac{|(\mathbf{c} - \mathbf{a})\mathbf{b}\mathbf{d}|}{|\mathbf{b} \times \mathbf{d}|} = \frac{|(\mathbf{c} - \mathbf{a})(\mathbf{b} \times \mathbf{d})|}{|\mathbf{b} \times \mathbf{d}|}.$$

7 Zahlenfolgen

7.1 Grenzwert einer Zahlenfolge

Definition 39 Eine reelle Zahlenfolge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ mit $n \rightarrow a_n$. Die a_n heißen Folgenglieder. (analog komplexe Zahlenfolge).

Bezeichnung: $\{a_n\}$

Definition 40 1. Zwei Folgen heißen gleich ($\{a_n\} = \{b_n\}$), wenn $\forall n$ $a_n = b_n$ gilt.

2. Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$ heißt

2.1. monoton wachsend (fallend), wenn $\forall n$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$),

2.2. beschränkt, wenn $\exists K \forall k$ gilt $|a_k| \leq K$.

3. Eine Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge $\{a_n\}$ (Bez.: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$), wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon)$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.

4. Wenn $\{a_n\}$ einen Grenzwert hat, so heißt die Folge konvergent, andernfalls divergent.

5. Ist der Grenzwert 0, so heißt die Folge eine Nullfolge.

6. Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$, so heißt die Folge bestimmt divergent gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$.

Satz 56 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bedeutet: Zu jeder noch so kleinen ε -Umgebung U_ε von a gibt es eine Zahl N so, dass ab dem Index N alle Glieder a_n (mit $n \geq N$) der Folge in U_ε liegen.

$\Rightarrow$ Die Abänderung von endlich vielen Folgengliedern, lässt das Konvergenzverhalten der Folge unberührt.

$\Rightarrow$ Eine Aussage, die für alle bis auf endlich viele Folgenglieder gilt, heißt gültig für *fast alle* Folgenglieder.

$\Rightarrow$ Teilfolge

Satz 57 1. Grenzwert einer Folge ist, falls er existiert, eindeutig bestimmt.

2. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge $\{a_n\}$ strebt gegen denselben Grenzwert wie $\{a_n\}$.

Satz 58 Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ konvergente Zahlenfolgen mit den Grenzwerten a und b und sei α eine Zahl. Dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n) = \alpha a$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$,
- aus $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

$\Rightarrow$ Die Abbildung, die einer konvergenten Folge ihren Grenzwert zuordnet, ist linear.

$\Rightarrow$ Rechnen mit Unendlich

7.2 Konvergenzkriterien

Satz 59 1. **Notwendiges Konvergenzkriterium**

Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.

2. **Hinreichendes Konvergenzkriterium**

Jede beschränkte, monotone Folge $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ist konvergent.

3. **Vergleichskriterium**

Strebt $\{a_n\} \rightarrow a$ und $\{b_n\} \rightarrow a$ und gilt (fast immer) $a_n \leq c_n \leq b_n$, so konvergiert auch $\{c_n\}$ gegen a .

7.3 Häufungspunkte einer Zahlenfolge

Definition 41 Eine Zahl a heißt Häufungspunkt der reellen Zahlenfolge $\{a_n\}$, wenn in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Satz 60 1. Die Zahl a ist genau dann Häufungspunkt einer Folge, wenn sie Grenzwert einer Teilfolge derselben Folge ist.

2. Jede beschränkte reelle Zahlenfolge besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

$\Rightarrow$ Es gibt unbeschränkte Zahlenfolge die keinen, genau $k \geq 1$ oder unendlich viele Häufungspunkte besitzen.

Definition 42 Sei $H(\{a_n\})$ die Menge der Häufungspunkte von $\{a_n\}$, so ist Limes superior (Bez. $\limsup$ oder $\overline{\lim}$ der größte Häufungspunkt der Folge $\{a_n\}$, d.h. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup H(\{a_n\}) = \max H(\{a_n\})$).

$\Rightarrow$ $\liminf$ als kleinster Häufungspunkt.

Satz 61 1. Für jede konvergente Teilfolge $\{a'_n\}$ von $\{a_n\}$ ist $\liminf a_n \leq \lim a'_n \leq \limsup a_n$.

2. Es gibt immer Teilfolgen, die gegen $\liminf a_n$ bzw. $\limsup a_n$ konvergieren.

3. Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und nur einen Häufungspunkt besitzt. Dann ist die Gleichung $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$ erfüllt.

7.4 Funktionenfolgen

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion. Ferner sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in D definierte Funktion.

Definition 43 1. Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert an der Stelle $x_0 \in D$ gegen $g \in \mathbb{R}$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = g$ ist.

2. Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert punktweise gegen die Funktion f , wenn $\forall x \in D$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

3. Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion f , wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N \forall x \in D$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

8 Zahlenreihen

8.1 Begriff der unendlichen Reihe

Definition 44 1. Sei $\{a_n\}$ eine Zahlenfolge, so heißt $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ die n -te Partialsumme.

2. Die Folge $\{s_n\}$ der n -ten Partialsummen heißt unendliche Reihe.

3. Konvergiert $\{s_n\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, so nennt man die unendliche Reihe konvergent und s heißt der Wert der Reihe oder die Reihensumme. Man schreibt $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Eine nicht konvergierende Reihe heißt divergent.

4. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

5. Eine konvergente Reihe heißt unbedingt konvergent, wenn jede ihrer Umordnungen gegen dieselbe Summe konvergiert. Wenn die Reihensumme von der Reihenfolge der Glieder abhängt, heißt sie bedingt konvergent.

$\Rightarrow$ Reihe ist keine Summe im üblichen Sinn. Der Reihenwert ist abhängig von der Reihenfolge der Reihenglieder.

$\Rightarrow$ Umordnung einer Reihe

8.2 Eigenschaften konvergenter Reihen

Satz 62 1. Eine Reihe mit positiven Gliedern konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.

2. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (notwendiges Konvergenzkriterium).

3. Aus der absoluten Konvergenz einer Reihe folgt ihre Konvergenz.

8.3 Rechnen mit konvergenten Reihen

Satz 63 1. Konvergente Reihen dürfen gliedweise addiert werden. Die Summe der Summenreihe ist gleich der Summe der Reihensummen. (Multiplikation mit einem Faktor.)

2. In einer konvergenten Reihe können beliebig Klammern gesetzt werden, ohne das Konvergenzverhalten und die Reihensumme zu ändern.

3. Eine Reihe ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sie absolut konvergent ist.

4. Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ beide absolut konvergent, so konvergiert jede ihrer Produktreihen absolut. Alle Produktreihen und insbesondere das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0)$ konvergieren gegen das Reihenprodukt $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$.

⇒ Umordnungssatz von Riemann

8.4 Konvergenzkriterien

Satz 64 1. (Leibnizsche Regel) Ist $\{a_k\}$ eine monoton fallende Nullfolge, so ist die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent.

2. (Majorantenkriterium) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern und gilt (fast immer) $|a_k| \leq b_k$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

3. (Minorantenkriterium) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern und gilt (fast immer) $a_k \geq b_k$, so divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

4. Wurzelkriterium

$\forall k \geq k_o : \sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \Rightarrow$ Konvergenz oder $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow$

Konvergenz

$\forall k \geq k_o : \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \Rightarrow$ Divergenz oder $\liminf_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow$

Divergenz

5. Quotientenkriterium

$\forall k \geq k_o : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \Rightarrow$ Konvergenz oder $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \Rightarrow$

Konvergenz

$\forall k \geq k_o : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \Rightarrow$ Divergenz oder $\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \Rightarrow$

Divergenz

Achtung ! $\forall k \geq k_o : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \not\Rightarrow$ Konvergenz oder $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| =$

$1 \not\Rightarrow$ Konvergenz

(analog für das Wurzelkriterium).

9 Potenzreihen

9.1 Konvergenzeigenschaften

Definition 45 Es seien $x_0 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ und die Folge $\{a_n\} \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$ gegeben. Der Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ heißt Potenzreihe in $x - x_0$ mit den Koeffizienten a_k . x ist eine reelle oder komplexe Variable und x_0 ist das Entwicklungszentrum der Reihe (der Mittelpunkt des Konvergenzkreises).

⇒ Es wird verabredet, dass $(x - x_0)^0 = 1$ ist, auch für $x = x_0$.

⇒ Die n -ten Partialsummen einer Potenzreihe sind Polynome n -ten Grades.

⇒ Eine Potenzreihe konvergiert, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

⇒ Für festes x ist die Potenzreihe eine Zahlenreihe. Konvergiert sie für dieses x heißt die Reihe in x punktweise konvergent.

⇒ Da x eine Variable ist, ist neben der punktweisen Konvergenz auch die gleichmäßige Konvergenz zu untersuchen. Die Potenzreihe heißt im Intervall I gleichmäßig konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen für $x \in I$ gleichmäßig konvergiert (vgl. Definition 43).

Satz 65 Es gibt eine Zahl $r \geq 0$ so, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ für alle x mit $|x - x_0| < r$ absolut konvergiert und für alle x mit $|x - x_0| > r$ divergiert. Die Zahl r heißt Konvergenzradius der Potenzreihe und kann nach der Formel

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{1}{\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

berechnet. Für alle x mit $|x - x_0| \leq r_1 < r$ ist die Reihe gleichmäßig konvergent. Stimmt x mit einem der Randpunkte des Konvergenzintervalls überein, kann man ohne weitere Untersuchungen keine Aussage über das Konvergenzverhalten machen.

⇒ $r = 0$ (nirgends konvergent) und $r = \infty$ (beständig konvergent) sind möglich.

9.2 Rechnen mit Potenzreihen

Satz 66 Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 und r_2 und α, β seien reelle oder komplexe Zahlen. Dann gilt:

1. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)(x-x_0)^k$ hat einen Konvergenzradius $r \geq \min\{r_1, r_2\}$.

2. Für $|x-x_0| < \min\{r_1, r_2\}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)(x-x_0)^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$.

3. Sei $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$, so gilt

3.1. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ hat einen Konvergenzradius $r \geq \min\{r_1, r_2\}$.

3.2. Für $|x-x_0| < \min\{r_1, r_2\}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

4. (Identitätssatz von Potenzreihen) Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$

und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ mit den Konvergenzradien r_1 und r_2 . Stimmen die Reihen auf den Punkten $x_k \neq x_0$ einer gegen x_0 konvergenten Folge $\{x_n\}$ überein, gilt also $f(x_k) = g(x_k)$ für $k = 1, 2, \dots$, so müssen beide Funktionen und beide Reihen identisch sein, es muss somit gelten $f(x) = g(x)$ für jedes x mit $|x-x_0| < \min\{r_1, r_2\}$ und $a_n = b_n$ für jede $n \in \mathbb{N}$.

⇒ In jedem Intervall $I = (a, b)$, das vollständig im Konvergenzintervall der Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ enthalten ist, d.h. es ist die Ungleichung $x_0 - r \leq a \leq b \leq x_0 + r$ erfüllt, ist die Summenfunktion $f(x)$ der Reihe stetig.

⇒ Im Innern des Konvergenzkreises kann die Potenzreihe gliedweise differenziert und gliedweise integriert werden. Dabei haben die so entstehenden Reihen den gleichen Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe.

10 Reelle Funktionen

10.1 Grundbegriffe

Definition 46 Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine reellwertige Funktion f einer reellen Veränderlichen ist eine solche Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, bei der zu jedem $x \in D$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ in Relation steht $((x, y) \in f)$. Die Menge D heißt Definitionsbereich und die Menge W aller Zahlenwerte $f(x)$, die sich ergibt, wenn x den Definitionsbereich durchläuft, heißt Wertebereich der Funktion f .

Bezeichnung: $y = f(x)$

⇒ Graph einer Funktion

⇒ Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen mit Hilfe von kartesischen Koordinaten (explizit, implizit), Polarkoordinaten, in Parameterdarstellung.

⇒ Wiederholung: surjektiv, injektiv, bijektiv

⇒ Wiederholung: Inverse Funktion, Verkettete Funktion

⇒ Weitere Begriffe: beschränkte, gerade, ungerade, periodische, monotone, konvexe, konkave Funktion

10.2 Elementare Funktionen

1. Potenzfunktion
2. Polynome, rationale Funktionen

⇒ Wiederholung Grad $\text{grad}(p)$ und Nullstellen (mehrfache) eines Polynoms

⇒ Wiederholung des Fundamentalsatzes der Algebra,

⇒ Anwendungen des Hornerchemas

Satz 67 2.1. Identitätssatz für Polynome: *Stimmen die Werte zweier Polynome $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ und $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ an $n + 1$ verschiedenen Stellen überein, so sind die Polynome identisch, d.h. es ist $a_k = b_k$ für $k = 0, 1, \dots, n$ und somit $p(x) = q(x)$ für alle x .*

2.2. Divisionssatz für Polynome: *Ist $s(x)$ ein nichttriviales Polynom, so läßt sich jedes Polynom $p(x)$ in der Form $p = qs + r$ mit $\text{grad}(r) < \text{grad}(s)$ und eindeutig bestimmten Polynomen q und r darstellen.*

2.3. Interpolationspolynom nach Lagrange: *Für $n + 1$ gegebene Punkte $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$ gibt es genau ein Polynom n -ten Grades $P_n(x)$ mit der Interpolationseigenschaft: $P_n(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1, \dots, n$. In der Lagrangeschen Form hat es die Gestalt:*

$$P_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x)$$

mit

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

⇒ Berechnung von Polynomen (sehr) hohen Grades ist instabil.

3. Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion
4. Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen
5. Hyperbelfunktionen und Umkehrfunktionen

10.3 Grenzwert von Funktionen

Definition 47 *Es sei x_0 ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion f . Diese hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g (rechtsseitigen Grenzwert, linksseitigen Grenzwert)*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = g \right),$$

falls

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\forall x \neq x_0$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Dazu ist

2. *die Folgenbedingung:*
für jede Folge $x_n \rightarrow x_0$ strebt die Folge $f(x_n) \rightarrow g$
äquivalent.

Auch die Fälle $x_0 \rightarrow \pm\infty$ (Grenzwert im Unendlichen) und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ (Uneigentlicher Grenzwert) sind möglich.

$\Rightarrow$ Unbestimmte Ausdrücke

$\Rightarrow$ Rechenregeln und elementare Methoden zur Grenzwertberechnung

$\Rightarrow$ Grenzwert einer mittelbaren Funktion

10.4 Stetigkeit

Definition 48 1. Die Funktion $f(x), x \in D \subseteq \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in D$ stetig, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt. (Analog links- und rechtsseitig stetig). Andernfalls heißt die Funktion unstetig in x_0 .

2. f heißt stetig in einer Menge $I \subseteq D$, wenn f in jedem Punkt von I stetig ist. Falls $I = D$, sagt man f ist stetig.

⇒ Anschauliche Deutung der Stetigkeit

⇒ Klassifikation von Unstetigkeitsstellen

Satz 68 1. Summe, Differenz, Produkt und Quotient (Nenner $\neq 0$) von stetigen Funktionen sind stetig. (Speziell sind Polynome und rationale Funktionen stetig)

2. Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.

3. Jede elementare Funktion ist auf jedem Intervall ihres Definitionsbereiches stetig.

Satz 69 [Stetigkeit und Monotonie / Stetigkeit der Umkehrfunktion]

1. Eine auf $[a, b]$ monotone Funktion hat nur Sprungstellen als Unstetigkeitsstellen und davon höchstens abzählbar viele.

2. Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann umkehrbar, d.h. f^{-1} existiert, wenn f streng monoton ist. In diesem Falle ist f^{-1} ebenfalls stetig im Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$, $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$.

Satz 70 [Eigenschaften stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen]

1. **Bolzano** [1781-1848] Ist f auf dem Intervall $I = [a, b]$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit der Eigenschaft $f(c) = 0$.
2. **Zwischenwertsatz** Ist f auf dem Intervall $I = [a, b]$ stetig und $f(a) < y_0 < f(b)$, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit der Eigenschaft $f(x_0) = y_0$.
3. **Weierstraß** [1815-1897] Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion hat dort ein Minimum und ein Maximum, d.h. es existieren stets Werte $x_0, x_1 \in [a, b]$ so, dass $\forall x \in [a, b]$ die Ungleichung $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ gilt.
4. **Folgerung:** Ist f auf dem Intervall $I = [a, b]$ stetig, dann $\exists K \forall x \in I : |f(x)| \leq K$.

$\Rightarrow$ Bolzano: Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ durch Intervallhalbierung.

$\Rightarrow$ Auf einem offenen Intervall kann eine stetige Funktion unbeschränkt sein.

$\Rightarrow$ Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$, Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ für $x \in [a, b]$

Satz 71 (Stetigkeit der Grenzfunktion) Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\{f_n\}$ eine Funktionenfolge bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ eine Funktionenreihe. Die Glieder f_n der Folge bzw. der Reihe seien für alle $x \in I$ definierte und stetige Funktionen.

1. Konvergiert $\{f_n\}$ in I gleichmäßig gegen f , so ist auch die Grenzfunktion f stetig.
2. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in I gleichmäßig gegen f , so ist auch die Summenfunktion f stetig.
3. **Folgerung:** (Reelle) Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzintervalls stetig.

11 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

11.1 Ableitung

11.1.1 Definition der Ableitung einer Funktion

Definition 49 Sei f eine reelle Funktion und $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar in x_0 , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f im Punkt x_0 . Existiert der Grenzwert $\forall x \in D$, so heißt f in D differenzierbar und die Funktion $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (erste) Ableitung von f .

⇒ Rechtsseitige (linksseitige) Ableitung

- Geometrische Deutung als Anstieg der Tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ an $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ als Grenzlage von Sekantenanstiegen
- Tangente als lineare Approximation
- Physikalische Deutung als Geschwindigkeit (Weg-Zeit-Funktion)

⇒ Höhere Ableitungen

11.1.2 Differenzierbarkeit von Funktionen

⇒ Differenzierbarkeit auf einem Intervall

⇒ Anschauliche Deutung der Differenzierbarkeit am Graphen der Funktion

⇒ Stetigkeit ist eine notwendige (aber keine hinreichende) Voraussetzung für die Differenzierbarkeit.

11.1.3 Ableitungsregeln

- ⇒ Ableitung von Summe, Produkt und Quotient
- ⇒ Ableitung elementarer Funktionen
- ⇒ Ableitung mittelbarer Funktionen (Kettenregel)
- ⇒ Logarithmische Ableitung
- ⇒ Ableitung der Umkehrfunktion
- ⇒ Ableitung impliziter Funktionen
- ⇒ Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung

11.2 Das Differential und elementare Fehlerrechnung

⇒ Funktionswertdifferenz $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + h) - f(x)$

⇒ Weierstraßsche Zerlegungsformel: $\Delta y = f'(x)h + \varphi(h)h$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ bzw. mit $h = \Delta x$ erhält man $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varphi(\Delta x)\Delta x$

Definition 50 Der lineare Anteil der Funktionswertdifferenz $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ heißt das **Differential** von $f(x)$. Es wird mit $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$ bezeichnet.

⇒ Die Weierstraßsche Zerlegungsformel wird damit und mit $\Delta x = dx$ zu $\Delta y = dy + \varphi(dx)dx$.

⇒ Es ist $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

⇒ Fehlerrechnung: Ist $\tilde{x}$ ein Näherungswert (Messwert) zum (unbekannten) Wert x ($\Delta x = \tilde{x} - x$), so ist

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| = |\Delta y| \approx |dy| = |f'(\tilde{x})\Delta x|.$$

Ist der Messfehler durch eine Größe δ beschränkt, d.h., es gilt $|\Delta x| \leq \delta$, so erhält man die Abschätzung für den (absoluten) Fehler

$$|\tilde{y} - y| = |f(\tilde{x}) - f(x)| = |\Delta y| \approx |dy| \leq |f'(\tilde{x})|\delta.$$

	Exakter Wert	Genäherter Wert
Absoluter Fehler	$ \Delta y = \tilde{y} - y $	$ dy = f'(\tilde{x})\Delta x $
Relativer Fehler	$ \frac{\Delta y}{\tilde{y}} $	$ \frac{dy}{\tilde{y}} $
Prozentualer Fehler	$ \frac{\Delta y}{\tilde{y}} \cdot 100\%$	$ \frac{dy}{\tilde{y}} \cdot 100\%$

11.3 Sätze über differenzierbare Funktionen

Satz 72 Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige, in (a, b) differenzierbare Funktionen und $a \neq b$, so gilt

1. *Satz von Fermat (1601-1665):* Nimmt die Funktion f im Punkt $\xi \in (a, b)$ einen (relativen) Extremwert an, so ist $f'(\xi) = 0$.
2. *Satz von Rolle (1652-1719) :* Falls $f(a) = f(b)$, so $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.
3. *Mittelwertsatz:* $\exists x_0 \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$
4. *Verallgemeinerter Mittelwertsatz:* Wenn $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ und $g(a) \neq g(b)$, so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

11.4 Unbestimmte Ausdrücke, Regel von Bernoulli-de l'Hospital

Johann Bernoulli (1654-1705), Marquis de l'Hospital (1661-1704)

⇒ Unbestimmte Ausdrücke: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞

⇒ Grundlage: Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Satz 73 Die Funktionen $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \neq b$) mögen in $(a, b]$ stetig und differenzierbar sein und es gelte immer $g'(x) \neq 0$.

1. Ist $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$ und existiert $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Ist $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$ und existiert $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkungen:

- Die Funktionen f und g brauchen für $x = a$ nicht definiert sein.
- Die Regeln des Satzes gelten sinngemäß für $\lim_{x \rightarrow a-0}$ und für $\lim_{x \rightarrow a}$. Auch $a = \pm\infty$ ist zugelassen.
- Eine wiederholte Anwendung der Regel ist möglich, falls im ersten Fall $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g'(x) = 0$ ist und $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ existiert usw.
- Die anderen unbestimmten Ausdrücke werden auf die beiden behandelten zurückgeführt.

11.5 Die Taylorsche Formel

Taylor (1685-1731)

⇒ Frage: wann und wie ist eine Funktion als Potenzreihe darstellbar?

⇒ Taylorsche Formel für Polynome (Hornerschema)

Satz 74 *Satz von Taylor*

Die Funktion f sei in einer Umgebung U der Stelle x_0 $(n + 1)$ -mal differenzierbar, und es sei $x \in U$. Dann lässt sich f auf folgende Weise nach Potenzen von $(x - x_0)$ entwickeln:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_n(x)$$

mit dem Restglied (von Lagrange)

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \quad \text{für } 0 < \vartheta < 1$$

.

⇒ Falls für x aus einem Intervall für den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ gilt, so konvergiert die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$ gegen $f(x)$ (f wird dort durch die Potenzreihe dargestellt).

⇒ Mac Laurinsche Reihe

⇒ Taylorsche Formel für einige elementare Funktionen

11.6 Untersuchung von Funktionen

11.6.1 Monotonie

⇒ Grundlage: Mittelwertsatz

Satz 75 1. $\forall x \in I : f'(x) > (<)0 \Rightarrow f$ ist auf I streng monoton wachsend (fallend)

2. $\forall x \in I : f'(x) \geq (\leq)0 \Rightarrow f$ ist auf I monoton wachsend (fallend)

3. $\forall x \in I : f'(x) = 0 \Rightarrow f$ ist auf I konstant

11.6.2 Lokale oder relative Extremwerte

Definition 51 Sei f auf dem Intervall (a, b) definiert. Eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ heißt relative Maximalstelle (Minimalstelle) von f , wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, sodass $\forall x \in U$ gilt $f(x) \leq (\geq)f(x_0)$. Der zugehörige Funktionswert $f(x_0)$ heißt relatives Maximum (Minimum) der Funktion. Wenn U gleich dem Definitionsbereich D ist, so ist x_0 eine absolute (globale) Extremstelle von f (vgl. im Satz 70 den Satz von Weierstraß).

Satz 76 Sei f auf dem Intervall (a, b) definiert und $x_0 \in (a, b)$. Weiterhin sei f differenzierbar für $x \in U(x_0)$.

1. $\forall x < x_0 : f'(x) > 0$ und $\forall x > x_0 : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 eine Maximalstelle,

2. $\forall x < x_0 : f'(x) < 0$ und $\forall x > x_0 : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 eine Minimalstelle.

3. Ist x_0 eine Extremalstelle, so wechselt f' dort das Vorzeichen und es muss $f'(x_0) = 0$ (vgl. im Satz 72 den Satz von Fermat) gelten (Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums).

⇒ Ein Punkt $x \in I$, für den $f'(x) = 0$ ist, heißt stationärer Punkt.

⇒ Kritische Punkte (Kandidaten für Extremstellen) für $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sind:

- Randpunkte von I , falls I abgeschlossen ist,
- Punkte, in denen f nicht differenzierbar ist,
- stationäre Punkte im Innern von I .

Satz 77 (Hinreichende Bedingung für relative Extrema) Sei f in einer Umgebung $U(x_0)$ $(2k)$ -mal stetig differenzierbar und es gelte $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(2k)}(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 eine relative Extremstelle. Aus $f^{(2k)}(x_0) > (<)0$ folgt, dass $f(x_0)$ ein relatives Minimum (Maximum) ist.

⇒ Spezialfall $k = 1$

11.6.3 Wendepunkte

⇒ Die zweite Ableitung beschreibt das Krümmungsverhalten.

Satz 78 1. $\forall x \in I : f''(x) > (<)0 \Rightarrow f$ ist auf I konvex (von unten).

2. $\forall x \in I : f''(x) < 0 \Rightarrow f$ ist auf I konkav (von unten).

⇒ Punkte, in denen sich das Krümmungsverhalten ändert, heißen Wendepunkte. Sie sind Extrempunkte von $f'(x)$.

⇒ Notwendige Bedingung für Vorliegen eines Wendepunktes x_0 ist $f''(x_0) = 0$.

Satz 79 Sei f in einer Umgebung $U(x_0)$ $(2k + 1)$ -mal stetig differenzierbar und es gelte $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(2k)}(x_0) = 0$ und $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 ein Wendepunkt. Aus $f^{(2k+1)}(x_0) > (<)0$ folgt, dass in x_0 konkaves in konvexes (konvexes in konkaves) Verhalten übergeht.

11.6.4 Asymptoten

Definition 52 Eine Gerade $y = ax + b$ heißt geneigte Asymptote zu $y = f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$, wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ist.

⇒ Analog für $x \rightarrow -\infty$, vertikale Asymptoten, horizontale Asymptoten

⇒ Genau dann existiert eine geneigte Asymptote, wenn die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} (= a)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) (= b)$ existieren.

11.6.5 Kurvendiskussion

No.	Kurvendiskussion der Funktion $y = f(x)$
1.	Definitionsbereich
2.	Symmetrieeigenschaften: gerade/ ungerade/ keine Aussage
3.	Unstetigkeitsstellen von f
4.	Differenzierbarkeit
5.	Nullstellen
6.	Vorzeichen von f
7.	Monotonieintervalle
8.	relative Extremwerte, absolute Extremwerte
9.	Konvex- und Konkavbögen und Wendepunkte
10.	Verhalten im Unendlichen (Asymptoten)
11.	Skizze

11.7 Differenzierbarkeit von Grenzfunktionen bei Funktionsfolgen und -reihen

Satz 80 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\{f_n\}$ eine Funktionenfolge bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ eine Funktionenreihe. Die Glieder f_n der Folge bzw. der Reihe seien für alle $x \in I$ definierte und differenzierbare Funktionen.

1. Konvergiert $\{f_n(x_0)\}$ für ein $x_0 \in I$ und ist $\{f'_n\}$ in I gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergent, so gibt es eine differenzierbare Funktion f , sodass $\{f_n\}$ in I gleichmäßig gegen f konvergiert und die Differentiation mit der Grenzwertbildung vertauschbar ist. Es gilt also die Gleichung:

$$f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

2. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ für ein $x_0 \in I$ und ist $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ in I gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergent, so gibt es eine differenzierbare Funktion f , sodass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in I gleichmäßig gegen f konvergiert und die Reihe gliedweise differenziert werden darf, d.h., es gilt die Gleichung:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

Satz 81 Differenzierbarkeit einer Potenzreihe Sei

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine (reelle) Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann gilt:

1. f ist in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ differenzierbar und es ist

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1},$$

d.h. die Reihe kann gliedweise differenziert werden.

2. Der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ ist ebenfalls ρ .

Folgerung 9 Eine Potenzreihe darf beliebig oft in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ differenziert werden und es ist

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)^{(k)} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k} \\ &= k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (x - x_0)^{n-k} \\ &= k! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} a_{k+n} (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

11.8 Näherungsweise Lösen von Gleichungen

⇒ Problem Nullstellenberechnung x^* mit $f(x^*) = 0$, Alternative (Verbesserung) zum Bisektionsverfahren

⇒ Iterationsverfahren zur näherungsweisen Berechnung der Nullstellen

⇒ Voraussetzungen:

Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die folgenden Voraussetzungen:

- f sei zweimal stetig differenzierbar und $\forall x \in [a, b]$ sei $f''(x) \geq 0$ (konvex) oder $f''(x) \leq 0$ (konkav),
- $\forall x \in [a, b] : f'(x) \neq 0$,
- $f(a)f(b) < 0$.

11.8.1 Regula falsi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_0 - x_n)}{f(x_0) - f(x_n)}, \quad x_0, x_1 \in [a, b], n = 1, 2, \dots$$

Startwerte:

$x_0 = a, x_1 = b$ falls f', f'' verschiedene Vorzeichen

$x_0 = b, x_1 = a$ falls f', f'' gleiche Vorzeichen haben

Satz 82 Die Funktion $y = f(x)$ genüge den obigen Voraussetzungen. Die durch die Regula falsi definierte Folge $\{x_n\}$ konvergiert dann gegen die Lösung x^* der Gleichung $f(x) = 0$ (von x_2 ab monoton).

11.8.2 Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 \in [a, b], n = 0, 1, 2, \dots$$

Startwert:

$x_0 \in [a, b]$ so wählen, dass $f(x_0)$ und $f''(x_0)$ das gleiche Vorzeichen besitzen ($f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$).

Satz 83 Sind die obigen Voraussetzungen erfüllt und wird der Startwert wie beschrieben gewählt, so konvergiert die durch das Newton-Verfahren gegebene Zahlenfolge $\{x_n\}$ monoton gegen die gesuchte Lösung x^* der Gleichung $f(x) = 0$. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - x^*| \leq \frac{f(x_n)}{m} \quad \text{mit} \quad m = \min_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Falls $f'''(x)$ für $x \in [a, b]$ stetig ist, so hat man quadratische Konvergenz, d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - x^*| \leq K(x_n - x^*)^2 \quad \text{mit einer Konstanten } K \text{ für } n = 0, 1, \dots$$

11.8.3 Allgemeines Iterationsverfahren

$\Rightarrow f(x) = 0$ wird in die iterierfähige Form $x = \varphi(x)$ (Fixpunktgleichung) überführt

$\Rightarrow$ Eine Lösung x^* der Gleichung $x = \varphi(x)$ heißt Fixpunkt der Funktion φ und ist Nullstelle von f .

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in [a, b], n = 0, 1, 2, \dots$$

Satz 84 Es sei $I = [a, b]$ ein gegebenes Intervall und ist $I^* = [a - (b - a), b + (b - a)]$. Die Funktion φ habe in I einen Fixpunkt x^* . In I^* gelte $0 < |\varphi'(x)| \leq q < 1$. Dann konvergiert die durch das allgemeine Iterationsverfahren definierte Folge $\{x_n\}$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in I$ gegen den Fixpunkt x^* . Es gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*| \quad \text{oder} \quad |x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

12 Integralrechnung

12.1 Das unbestimmte Integral

⇒ Umkehrung der Differentiation

Definition 53 Jede auf $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion F , deren Ableitung gleich f ist, heißt **Stammfunktion** von f , d.h., F ist Stammfunktion zu f , falls $(\forall x \in I) \quad F'(x) = f(x)$ gilt.

Satz 85 Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ auf I und c eine beliebige Konstante, so ist $F(x) + c$ die allgemeine Stammfunktion oder das **unbestimmte Integral** zu f .

Bezeichnung: $\int f(x)dx$.

⇒ Das unbestimmte Integral ist keine einzelne Funktion, sondern eine Menge von Funktionen: $\int f(x)dx = \{F : F'(x) = f(x)\}$. Es ist abhängig von der Integrationsvariablen.

⇒ Aus $F'(x) = f(x)$ folgen zwei Gleichungen.

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x) \quad \text{und} \quad \int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x) + c$$

⇒ Grundintegrale

Funktion $y = f(x)$	Stammfunktion	Bemerkungen
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\alpha \neq -1, x > 0$
x^{-1}	$\ln x + c$	$x \neq 0$
$\sin x$	$-\cos x + c$	
$\cos x$	$\sin x + c$	
e^x	$e^x + c$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$a > 0, a \neq 1$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x + c$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x + c$	$ x > 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x + c = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + c$	$ x < 1$
$\sinh x$	$\cosh x + c$	
$\cosh x$	$\sinh x + c$	

12.1.1 Integrationsmethoden für unbestimmte Integrale

Zu $f(x)$, $g(x)$ mögen Stammfunktionen existieren

1) Linearität des Integrals

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$$

2) Substitutionsregel

Ist F Stammfunktion zu f , $x = \varphi(t)$ eine stetig differenzierbare umkehrbare eindeutige Funktion, d.h., $t = \psi(x) = \varphi^{-1}(x)$, dann gilt:

$$F(\varphi(t)) + c = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(x) dx = F(x) + c$$

man beachte:

$$f(x) = f(\varphi(t)), \quad \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \quad dx = \varphi'(t) dt$$

Spezialfälle:

2.1. $F(x)$ sei Stammfunktion von $f(x)$; $\alpha \neq 0$. Dann gilt:

$$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C \quad \text{Substitution: } \alpha x + \beta = t, \quad x = \frac{t - \beta}{\alpha}$$

2.2. Ist $f(x) \neq 0$, $f(x)$ stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

2.3. $\int g^n(t) g'(t) dt = \frac{1}{n+1} g^{n+1}(t) + C$

3) Partielle Integration

Sind $f(x)$ und $g(x)$ in einem Intervall stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

Bemerkung 1 Die Ableitung einer elementaren Funktion ist eine elementare Funktion.

Das unbestimmte Integral einer elementaren Funktion braucht keine elementare Funktion sein.

z.B. $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x}$, $\int \sin(x^2) dx$

Es gibt nur wenige Klassen von Funktionen, die sich geschlossen integrieren lassen. Ein Beispiel für eine geschlossen integrierbare Funktionenklasse sind die rationalen Funktionen.

12.1.2 Integration gebrochener rationaler Funktionen

Gegeben: $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

Gesucht: $\int R(x)dx$

- 1) $m = \deg(P_m) \geq n = \deg(Q_n)$, dann $R(x)$ unecht gebrochene rationale Funktion
- 2) $m < n$, dann $R(x)$ echt gebrochen

Satz 86 Jede echt gebrochen-rationale Funktion ($m < n$) lässt sich in eine Summe von sogenannten Partialbrüchen zerlegen der Form: $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ bzw. $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta}$ mit $p^2 - 4q < 0$ zerlegen. Dabei sind α und $\beta \geq 1$ natürliche Zahlen. Die Zahl a ist eine reelle Nullstelle von des Nennerpolynoms $Q_n(x)$. Der quadratische Faktor $x^2 + px + q$ gehört der zu einem Paar konjugiert komplexer Nullstellen des Nennerpolynoms. Besitzt das Nennerpolynom $Q_n(x)$ die Faktorzerlegung

$$Q_n(x) = b_n(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_r)^{\alpha_r} (x^2 + p_1x + \rho_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + \rho_s)^{\beta_s}$$

So lautet die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \\ &= \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{A_{i1}}{x - x_i} + \frac{A_{i2}}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{A_{i\alpha_i}}{(x - x_i)^{\alpha_i}} \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \dots + \frac{B_{j\beta_j}x + C_{j\beta_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{\beta_j}} \right\}. \end{aligned}$$

Insgesamt kommen in dieser Zerlegung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + 2\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + 2\beta_s = n$$

unbekannte Koeffizienten vor.

$$(A_{ij}, B_{jk}, C_{jk})$$

$\Rightarrow$ Falls $R(x)$ nicht echt gebrochen ist, so Abspaltung des ganz rationalen Anteils durch Polynomdivision oder durch einen erweiterten Ansatz mit ganz rationalem Anteil.

$\Rightarrow$ Bestimmung der Koeffizienten A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}

- a) Koeffizientenvergleichsmethode
- b) Einsetzmethode

Integration der Partialbrüche:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = -\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + c, \quad \alpha \neq 1$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta} dx \quad \text{mit } 4q > p^2 \quad \text{für } \beta = 1, B = 0, C = 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \arctan \frac{x+p/2}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + c$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \frac{B}{2} \ln|x^2+px+q| + (C - \frac{B}{2}p) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\beta} = \frac{1}{(\beta-1)(4q-p^2)} \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{\beta-1}} + \frac{4\beta-6}{(\beta-1)(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\beta-1}}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta} dx = \frac{B}{2(\beta-1)(4q-p^2)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{\beta-1}} + (C - \frac{B}{2}p) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\beta} \Rightarrow \text{Das Integral einer gebrochen rationalen}$$

Funktion ist Summe einer gebrochen rationalen Funktion, sowie von Logarithmusfunktionen und Arkustangensfunktionen.

12.1.3 Integration weiterer Funktionenklassen

Durch geeignete Transformationen sind sie auf Integrale rationaler Funktionen zurückzuführen

$$1) \int R(e^x) dx = \int \frac{R(t)}{t} dt$$

Substitution: $e^x = t, \frac{dt}{dx} = e^x \rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

$$2) \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

Substitution: $\tan \frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Bemerkung 2 Oft sind einfachere Wege möglich als $t = \tan \frac{x}{2}$, z. B. $t = \sin x$ oder $t = \cos x$.

$$3) \text{ Das Integral } \int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right) \cdot \frac{n}{a} t^{n-1} dt$$

Substitution: $\sqrt[n]{ax+b} = t, x = \frac{t^n-b}{a}, dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$

$$4) \text{ Das Integral } \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx \quad (a > 0)$$

Substitution: $\sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a} = t, x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}, \frac{dx}{dt} = \frac{2t(t-2t\sqrt{a})+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}$

12.1.4 Integration durch Reihen

Satz 87 Durch gliedweise Integration einer konvergenten Potenzreihe ergibt sich eine neue im selben Bereich konvergente Potenzreihe.

⇒ Zur Integration von Funktionen für die eine Stammfunktion zwar existiert, sie aber keine elementare Funktion ist.

⇒ Zu den nur durch Reihenentwicklung berechenbaren Funktionen gehören auch die elliptischen Integrale

$$\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}) dx.$$

12.2 Das bestimmte Integral (Riemann-Integral)

12.2.1 Definition und einfache Eigenschaften

$f(x)$ sei eine beschränkte Funktion im Intervall $[a, b]$; $f(x) \geq 0$

⇒ Problem der Flächenberechnung

Lösung:

- Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$
- Auswahl von Zwischenpunkten $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k]$
- Ersetzung der Funktion f durch eine Treppenfunktion
- Verfeinerung der Zerlegung von $[a, b]$ mit $\Delta x_k \rightarrow 0$ für alle k (ausgezeichnete Zerlegungsfolge) und $n \rightarrow \infty$
- Grenzübergang $\Delta x_k \rightarrow 0$ für alle k und $n \rightarrow \infty$ der Fläche der Treppenfunktion: $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

Definition 54 Wenn bei einer beliebigen ausgezeichneten Zerlegungsfolge $\{Z_n\}$ des Intervalls $[a, b]$ mit $n \rightarrow \infty$ und beliebiger Auswahl der Punkte $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i]$ die Folge der zugehörigen Integralsummen $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ (für $n \rightarrow \infty$ und $\max \Delta_k \rightarrow 0$) stets ein und denselben Grenzwert besitzt, dann heißt $f(x)$ integrierbar über $[a, b]$ und der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta_k \rightarrow 0}} S_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt *bestimmtes (Riemannsches) Integral* der Funktion $y = f(x)$ über $[a, b]$ und wird mit dem Symbol:

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{bezeichnet.}$$

Bemerkung 3 Aus der Definition des bestimmten Integrals ergeben sich einige einfache Eigenschaften.

- 1) Wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, so ist $\int_a^b f(x) dx$ die Maßzahl des Flächeninhalts des Bereiches zwischen der x -Achse und der Kurve $y = f(x)$ seitlich begrenzt durch die Geraden $x = a$ und $x = b$.
- 2) Ist $f(x) \leq 0$ für $x \in [a, b]$, dann ist $-\int_a^b f(x) dx$ der Flächeninhalt zwischen Kurve und x -Achse.
- 3) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$, d. h. das bestimmte Integral hängt nicht von x ab, sondern ist eine Zahl, wohingegen das unbestimmte Integral eine Funktion ist.
- 4) $\int_a^a f(x) dx = 0$ und $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

Satz 88 Jede in $[a, b]$ stetige (stückweise stetige beschränkte) Funktion ist integrierbar über $[a, b]$.

Satz 89 $f(x)$, $g(x)$ seien integrierbar über dem Intervall $[a, b]$ mit $b > a$. Dann gilt:

- 1) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- 2) $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$
- 3) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- 4) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$
- 5) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt:
 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
 Ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$, so gilt:

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M \cdot (b-a)$$

Satz 90 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig, so gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in [a, b]$ derart, dass

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

gilt.

⇒ Geometrische Bedeutung

Definition 55 Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig, so wird der Mittelwert y_m der Funktion $f(x)$ durch

$$y_m = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

definiert.

12.2.2 Der Zusammenhang zwischen unbestimmten und bestimmten Integral

⇒ Problem der Berechnung bestimmter Integrale

Satz 91 Wenn die Funktion $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ (Integral mit variabler oberer Grenze) für jedes $x \in [a, b]$ definiert ist, so ist sie eine Stammfunktion von $f(x)$, d.h., es gilt

$$\frac{d}{dx} G(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Satz 92 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$f(x)$ sei im Intervall $[a, b]$ stetig, $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

12.2.3 Substitutionsregel und partielle Integration für bestimmte Integrale

1° Substitutionsregel

Satz 93 (Substitutionsregel für bestimmte Integrale)

Sei $f(x)$ eine in $[a, b]$ stetige Funktion.

Weiter sei $x = \varphi(t)$ eine im Intervall $[\alpha, \beta]$ streng monotone (wachsend oder fallende) stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

2° Partielle Integration

Satz 94 $f(x), g(x)$ seien stetige differenzierbare Funktionen über $[a, b]$.

Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

12.3 Anwendungen der Integralrechnung

12.3.1 Flächeninhalt ebener Figuren

- 1) Die Fläche wird über dem Intervall $[a, b]$ durch die Funktionskurve $y = f(x) \geq 0$ begrenzt:

$$F = \int_a^b f(x) dx.$$

- 2) Die Fläche wird oben durch die Kurve $y = f(x)$ und nach unten durch die Kurve $y = g(x)$, seitlich durch die Geraden $x = a$, $x = b$ begrenzt. ($\forall x \in [a, b]$ gilt $f(x) \geq g(x)$)

$$F = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel von f beachten

- 3) Für $t \in [\alpha, \beta]$ ist die Kurve in der Parameterform $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ mit $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$ gegeben, dann gilt

$$F = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t) dt$$

- 4) Sektorformel:

Das Sektorgebiet S werde für $\alpha \leq t \leq \beta$ durch die Kurve $\mathcal{C}$: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ und durch die Strecken $\overline{OP_1}$ und $\overline{OP_2}$ mit $P_1 = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ und $P_2 = (\varphi(\beta), \psi(\beta))$ begrenzt. Wird die Kurve $\mathcal{C}$ für wachsende Werte von t in mathematische positivem Sinn durchlaufen, so erhält man die Fläche F des Sektors S durch

$$F = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)) dt.$$

Ist $\mathcal{C}$ eine (doppelpunktfreie) geschlossene Kurve ($P_1 = P_2$), dann berechnet sich der Flächeninhalt innerhalb der geschlossenen Kurve durch die Sektorformel.

12.3.2 Die Bogenlänge

- 1) Die Bogenlänge s des über dem Intervall $[a, b]$ gegebenen ebenen Kurvenstücks $y = f(x)$ berechnet sich im Falle, dass $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar ist, nach der Formel:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

- 2) Kurve in Parameterform gegeben $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

12.3.3 Volumenberechnung

- 1) Volumenberechnung eines Körpers K bei gegebener Querschnittsfläche $q(x)$ für $a \leq x \leq b$:

$$V = \int_a^b q(x) dx$$

- 2) Spezialfall: Volumen von Rotationskörpern:
 K Körper, der entsteht, wenn das Kurvenstück $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ um die x -Achse rotiert. Querschnittsfläche ist ein Kreis mit Radius $f(x)$, d.h. $q(x) = \pi \cdot (f(x))^2$ und somit folgt:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx .$$

- 3) Ist die Kurve in Parameterform gegeben
 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$
und ist $\varphi'(t) > 0$, so gilt für das Volumen des Körpers, der durch Rotation um die x -Achse entsteht

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt$$

Entsprechend:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(t))^2 \psi'(t) dt$$

für Volumen des Körpers, der bei der Rotation der Kurve um die y -Achse entsteht.

12.3.4 Mantelfläche von Rotationskörpern

Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, $(f(x) \geq 0)$ rotiert um x -Achse Mantelfläche des Rotationskörpers

$$F_M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Ist die Kurve in der Parameterform $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ gegeben, dann berechnet sich die Mantelfläche des zugehörigen Rotationskörpers nach der Formel

$$F_M = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

12.3.5 Schwerpunkt eines ebenen Bereiches und Guldinsche Regeln

1) Koordinaten des Schwerpunktes:

$$x_S = \frac{1}{F} \int_a^b x f(x) dx, \quad y_S = \frac{1}{2F} \int_a^b (f(x))^2 dx$$

2) 1. Guldinsche Regel: Das Volumen V eines Körpers, der bei der Rotation der erzeugenden Fläche um die x -Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus F und dem Weg des Schwerpunktes um die Achse:

$$V = 2\pi y_S F.$$

Analog bei Rotation um y -Achse.

3) 2. Guldinsche Regel: Die Mantelfläche F_M eines durch eine rotierende Kurve entstehenden Rotationskörpers ist gleich dem Produkt der Kurvenlänge s und dem Weg des Schwerpunktes der Kurve um die Achse.

12.4 Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale

Sei $-\infty < a < b < \infty$ das Integrationsintervall. Mit $h = \frac{b-a}{n}$ wird die sogenannte Schrittweite bezeichnet. Für $i = 0, 1, \dots, n$ durch $x_i = a + ih$ wird das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teile zerlegt: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Weiterhin wird $y_i = f(x_i)$ gesetzt.

12.4.1 Rechteckregel:

Bei der Rechteckregel wird die Funktion $f(x)$ durch die Treppenfunktion $f^*(x) = f(x_i) = y_i$ in Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ ersetzt. Man erhält:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

Der Fehler der Rechteckformel beträgt:

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n}(y_0 + \dots + y_{n-1}) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi) \text{ mit } a < \xi < b$$

Bemerkung 4 Durch geschicktere Wahl der Rechteckhöhen lässt sich die Rechteckformel wesentlich verbessern.

Ersetzt man man f durch $f^*(x) = y_{i+\frac{1}{2}} = f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$ für $x \in [x_i, x_{i+1}]$, so ergibt sich die allgemein genauere Rechteckformel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2})$$

Bei dieser Rechteckformel beträgt der Fehler:

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} (y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2}) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) \quad a < \xi < b$$

12.4.2 Trapezformel

$f(x)$ wird durch einen Polygonzug $f^*(x)$ durch die Punkte $(x_i, f(x_i))$ angenähert. Trapezformel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \quad \text{mit } y_i = f(x_i)$$

Der Fehler der Trapezformel bei einer 2mal stetig differenzierbaren Funktion beträgt

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

$$(a < \xi < b)$$

12.4.3 Keplersche Fassregel

$[a, b]$ wird durch die Punkte $a = x_0 < x_1 = \frac{a+b}{2} < x_2 = b$ in zwei gleiche Teile geteilt. Die Kurve $y = f(x)$ wird angenähert durch die Parabel $y = f^*(x)$ durch die Punkte $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, $(b, f(b))$. Keplersche Fassregel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Der Fehler der Keplerschen Fassregel beträgt bei einer 4-mal stetig differenzierbaren Funktion $y = f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} (y_0 + y_1 \cdot 4 + y_2) = -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot 2^4} f^{(4)}(\xi) \quad (a < \xi < b)$$

Bemerkung 5 Mittels Keplerscher Fassregel lassen sich die Integrale von Polynomen bis zum Grade 3 exakt berechnen.

12.4.4 Simpsonsche Regel

Folgt durch Anwendung der Keplerschen Fassregel auf kleinere Teilintervalle des Ausgangsintervalls $[a, b]$.

Achtung ! $[a, b]$ wird jetzt in eine gerade Anzahl $n = 2m$ Teilintervalle der Länge $\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$ zerlegt.

Auf jedem Teilintervall $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ $k = 1, 2, \dots, m$ wird die Keplersche Fassregel angewendet.

Simpsonsche Regel:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6m} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) + R$$

$$\text{mit dem Fehler } R = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \quad \text{mit } a < x_i < b$$

Bemerkung 6 1) *Es gibt zahlreiche weitere Quadraturformeln.*

2) *Das Prinzip 'Ersetze die gegebene Funktion f durch eine einfachere f^* und integriere diese anstelle der Ausgangsfunktion' wird in sehr vielen Quadraturformeln benutzt.*

3) *Wichtige nicht besprochene Quadraturformeln sind die von Gauß angegebenen Gaußschen Quadraturformeln.*

12.5 Uneigentliche Integrale

bisher wurde das bestimmte (Riemannsches) Integral unter den Voraussetzungen:

- endliches Integrationsintervall $[a, b]$
- $f(x)$ ist auf $[a, b]$ beschränkt

definiert.

Ist eine der Voraussetzungen verletzt, spricht man von uneigentlichen Integralen, die mit Hilfe eines Grenzübergangs erklärt werden.

12.5.1 Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen

Definition 56

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (F(b) - F(a))$$

Das uneigentliche Integral ist der Grenzwert von eigentlichen Integralen. $\int_a^{\infty}$ heißt konvergent, wenn dieser Grenzwert existiert.

Analog:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

Satz 95 (Majorantenkriterium): Ist $f(x) \geq 0$ für $x \geq a$ und gilt für eine weitere Funktion $g(x)$ die Ungleichung $0 \leq f(x) \leq g(x)$, so folgt aus der Existenz von

$$\int_a^{\infty} g(x) dx \quad \text{die Existenz von} \quad \int_a^{\infty} f(x) dx$$

und die Ungleichung

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} g(x) dx$$

ist erfüllt. Ist $\int_a^{\infty} f(x) dx$ divergent, so ist auch das Integral $\int_a^{\infty} g(x) dx$ divergent.

Folgerung 10 1) Für $x \geq a > 0$ gelte $0 \leq f(x) \leq \frac{c}{x^k}$ mit den Konstanten $c > 0$, $k > 1$. Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

2) Für $x \geq a > 0$ gelte $f(x) \geq \frac{c}{x^k}$ mit Konstanten $c > 0$, $k \leq 1$, dann divergiert $\int_a^{\infty} f(x) dx$

12.6 Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden

Definition 57 Es sei $[a, b]$ ein endliches Intervall und b eine Polstelle der Funktion $y = f(x)$. Dann ist $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$.

Das Integral heißt konvergent, wenn dieser Grenzwert existiert und divergent, wenn er nicht existiert.

Satz 96 (Konvergenzkriterium für uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden)

Die Funktion $f(x) \leq \frac{c}{(b-x)^\alpha}$ ($\alpha > 0$) besitze bei $x = b$ eine Polstelle.

Dann ist das Integral $\int_a^b f(x) dx$ konvergent, falls $\alpha < 1$. Im Falle von $f(x) \geq \frac{c}{(b-x)^\alpha}$ und $\alpha \geq 1$ ist das Integral divergent.

$\Rightarrow$ Polstelle bei a oder bei $c \in (a, b)$

Achtung ! Es gibt zahlreiche weitere Integrale (Cauchyscher Hauptwert, Lebesguesches Integral, Stieltjes Integral).

13 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen

13.1 Funktionenbegriff

Definition 58 Eine reellwertige Funktion $f(\underline{x})$ von n reellen Veränderlichen ist eine auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ definierte Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$. Sie ordnet jedem Punkt (bzw. Vektor) $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in D$ in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $z = f(\underline{x})$ zu.

⇒ In $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ wird auch $z = f(x, y)$ oder $w = f(x, y, z)$ geschrieben.

⇒ explizite, implizite Funktion, Differentialgleichung, Tabelle

⇒ Deutung von $z = f(x, y)$ als Fläche im $\mathbb{R}^3$, Niveau- bzw. Höhenlinien

⇒ Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$, Zylinder-, Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

13.2 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

⇒ Abstand zweier Punkte im $\mathbb{R}^n$

⇒ δ -Umgebung $U_\delta(x_0)$ eines Punktes x_0

⇒ offene Teilmenge, abgeschlossene Teilmenge, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

Definition 59 Es sei $\underline{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- 1) Wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\forall \underline{x} \in D \cap U_\delta(x_0)$ die Ungleichung $|f(\underline{x}) - g| < \varepsilon$ erfüllt ist, so hat f in x_0 den Grenzwert g und man schreibt $\lim_{\underline{x} \rightarrow x_0} f(\underline{x}) = g$.
- 2) Äquivalent gilt: $\lim_{\underline{x} \rightarrow x_0} f(\underline{x}) = g$, wenn jede Folge $\{\underline{x}_n\}$ mit $\{\underline{x}_n\} \rightarrow \underline{x}_0$ stets $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\underline{x}_n) = g$ gilt.
- 3) f heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls $\lim_{\underline{x} \rightarrow x_0} f(\underline{x}) = f(x_0)$ ist.
- 4) f heißt stetig (in D), wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Satz 97 Eine auf einer abgeschlossenen und beschränkte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ definierte stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt auf D ein Maximum und ein Minimum an. D.h., $\exists \underline{x}_0, \underline{x}_1 \in D : \forall \underline{x} \in D$ gilt die Ungleichung $f(\underline{x}_0) \leq f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_1)$.

13.3 Partielle Ableitung, Gradient

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

Definition 60 Falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\underline{x}_0 + h \underline{e}_k) - f(\underline{x}_0))$$

existiert, heißt er partielle Ableitung von f nach (der Variablen) x_k und wird durch

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_0} = f_{x_k}(\underline{x}_0)$$

bezeichnet.

⇒ höhere partielle Ableitungen Bezeichnung:

$$\frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i} \right) = (f_{x_i})_{x_j}(\underline{x}) = f_{x_i x_j}(\underline{x})$$

⇒ Multiindex-Schreibweise: Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex mit $\forall k : \alpha_k \geq 0$ und $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \alpha \underline{x}} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\underline{x})$$

Definition 61 Ist f und alle partiellen Ableitungen bis einschließlich zur Ordnung m stetig, so ist $f \in C^m(D)$, d.h.,

$$C^m(D) = \left\{ f : \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \alpha \underline{x}} \text{ mit } 0 \leq |\alpha| \leq m \text{ stetig in } D \right\}$$

Satz 98 (Satz von Schwarz) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \in C^2(D)$. Dann gilt für beliebige $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $\forall \underline{x} \in D$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x}).$$

⇒ Verallgemeinerung auf höhere Ableitungen

Definition 62 Die Zusammenfassung aller partiellen Ableitungen an einer Stelle $\underline{x}$ zu einem Vektor wird als Gradient von f bezeichnet:

$$\text{grad} f(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}) = (f_{x_1}(\underline{x}), \dots, f_{x_n}(\underline{x}))^T.$$

13.4 Vollständiges (totales) Differential

⇒ Einschränkung der Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf $D \subset \mathbb{R}^2$

Definition 63 Sei $z = f(x, y)$ und seien Δx und Δy die Zuwächse von x bzw. y . Dann ist

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

der Zuwachs der Funktion $z = f(x, y)$ an der Stelle x_0 .

⇒ Anstelle der Tangente im $\mathbb{R}^1$ wird die Tangentialebene im $\mathbb{R}^2$ (und sogenannte Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$) betrachtet.

Sie hat die Gleichung:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Setzt man $dx = \Delta x = x - x_0$, $dy = \Delta y = y - y_0$ und $dz = z - z_0$, so kann man die Gleichung der Tangentialebene auch als

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

schreiben. dz ist der Zuwachs auf der Tangentialebene.

Satz 99 Sei $z = f(x, y)$, wobei $D = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ ist. Wenn $f \in C^1(D)$ ist, dann gilt

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy + \eta\rho$$

wobei $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist.

Die Größe η hängt von x_0, y_0, dx und dy ab und besitzt die Zusatzeigenschaft

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \eta = 0.$$

Definition 64 Eine Funktion, deren Inkrement Δz eine Darstellung wie im letzten Satz besitzt, heißt im Punkt (x_0, y_0) total oder vollständig (im Gegensatz zu partiell) differenzierbar. Der in dx und dy lineare Anteil dz von Δz heißt das totale oder vollständige Differential der Funktion f an der Stelle (x_0, y_0) mit dem Zuwachs (dx, dy) . Das totale Differential wird mit dz oder df bezeichnet.

⇒ Ist f total differenzierbar, so gilt in einer hinreichend kleinen Umgebung von (x_0, y_0) die Näherung $\Delta x \approx dx$.

Definition 65 (Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$) Unter dem totalen Differential einer Funktion von $w = f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ versteht man

$$dw = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = f_{x_1} dx_1 + \dots + f_{x_n} dx_n$$

=

$$\text{grad}f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0).$$

⇒ Anwendung des totalen Differentials in der Fehlerrechnung

13.5 Kettenregel

1) Sei $F(x, y) = f(\varphi(x, y))$. Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(\varphi(x, y))\varphi_x(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f'(\varphi(x, y))\varphi_y(x, y).$$

2) Sei $F(t) = f(x, y)$ mit $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, dann ist

$$\frac{dF}{dt} = f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t).$$

3) Sei $w = F(u, v)$ mit $u = g(x, y)$ und $v = h(x, y)$ mit f, g, h stetig differenzierbar. Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

13.6 Richtungsableitung

Definition 66 Sei $z = f(x, y)$ und $\underline{s} = (s_1, s_2)$ ein Einheitsvektor. Die Richtungsableitung von f im Punkt (x_0, y_0) in Richtung von $\underline{s}$ ist als

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{s}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ts_1, y_0 + ts_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

definiert.

Satz 100 Wenn f in $(x_0, y_0) \in D$ differenzierbar ist, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{s}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)s_1 + f_y(x_0, y_0)s_2 = \text{grad}f(x_0, y_0) \cdot \underline{s}.$$

$\Rightarrow$ Höhenlinien, ∇f ist orthogonal zu Höhenlinien.

Satz 101 Sei f eine Funktion von zwei Variablen, die im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar ist.

- 1) Der maximale Wert von $\frac{\partial f}{\partial \underline{s}}(x_0, y_0)$ ist $|\nabla f(x_0, y_0)|$.
- 2) Das maximale Wachstum von $f(x, y)$ tritt in Richtung von $\nabla f(x_0, y_0)$ auf.
- 3) Der minimale Wert von $\frac{\partial f}{\partial \underline{s}}(x_0, y_0)$ ist $-|\nabla f(x_0, y_0)|$.
- 4) Das minimale Wachstum von $f(x, y)$ tritt in Richtung von $-\nabla f(x_0, y_0)$ auf.

13.7 Mittelwertsatz und Taylorsche Formel

1) Mittelwertsatz

Satz 102 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h} \in D$ mit $\underline{h} \neq \underline{0}$ und f differenzierbar in jedem Punkt der Verbindungsstrecke von $\underline{x}_0$ und $\underline{x}_0 + \underline{h}$. Dann existiert ein $\vartheta \in (0, 1)$ mit

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \underline{h} \cdot \nabla f(\underline{x}_0 + \vartheta \underline{h}).$$

2) Taylorentwicklung

$\Rightarrow$ speziell $D \subset \mathbb{R}^2$

Satz 103 Sei in einer Umgebung U_δ von (x_0, y_0) $f(x, y) \in C^{n+1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f \right] (x_0, y_0) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \right] (x_0, y_0) + R_n(f, h, k) \end{aligned}$$

mit dem Restglied nach Lagrange:

$$R_n(f, h, k) = \frac{1}{(n+1)!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f \right] (x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)$$

für ein $0 < \vartheta < 1$.

13.8 Implizite Funktionen

Satz 104 Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (offen) und $F \in C^1(D)$. Es gelte für den Punkt $x_0, y_0 \in D$ die Gleichung $F(x_0, y_0) = 0$. Weiterhin sei $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es genau eine Funktion $y = f(x)$, die in einer Umgebung U_δ von x_0 auf der Zahlengeraden definiert ist und den Beziehungen:

$$f(x_0) = y_0, \quad F(x, f(x)) = 0 \text{ für alle } x \in U_\delta$$

gelten. Die Funktion f ist in U_δ stetig differenzierbar und es gilt für alle $x \in U_\delta$

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x \in U_\delta; y=f(x)}$$

Achtung ! Eine Auflösung der impliziten Funktion $F(x, y) = 0$ nach y ist meist unmöglich.

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} \text{ für } y = f(x).$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(F_y)^3}(-F_x^2 F_{yy} + 2F_x F_y F_{xy} - F_y^2 F_{xx}) \text{ für } y = f(x).$$

$\Rightarrow$ Taylorentwicklung impliziter Funktionen,

$\Rightarrow$ Extremwerte impliziter Funktionen

Satz 105 Notwendig für das Eintreten eines relativen Extremwertes der durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ implizit dargestellten Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist das Bestehen der Gleichung

$$F_x(x_0, y_0) = 0, \text{ mit } y_0 = f(x_0).$$

Hinreichend für das Vorliegen eines Extremwertes ist das Nichtverschwinden des Ausdrucks

$$f''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Ist dieser Ausdruck negativ (positiv), so liegt ein relatives Maximum (Minimum) von $f(x)$ an der Stelle x_0 vor.

13.9 Extremwerte

13.9.1 Extremwerte ohne Nebenbedingungen

Definition 67 Die in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ definierte Funktion $z = f(x, y)$ hat im (inneren) Punkt (x_0, y_0) ein relatives Maximum, falls in einer Umgebung $U_\delta(x_0, y_0)$, $\delta > 0$

$$\forall (x, y) \in U_\delta(x_0, y_0) \quad f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

gilt. Ist diese Beziehung für alle Punkte im Definitionsbereich erfüllt, so besitzt f ein absolutes Maximum.

Die Funktion f hat ein absolutes bzw. relatives Minimum, falls $-f$ dort ein absolutes bzw. relatives Maximum hat.

Satz 106 (Notwendige Bedingung) $f(x, y)$ besitze in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetige partielle Ableitungen. Hat f in (x_0, y_0) ein relatives Extremum, so gilt:

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ und } f_y(x_0, y_0) = 0.$$

D.h., in einem relativen Extremum verläuft die Tangentialebene parallel zur x, y -Ebene.

Achtung ! Die genannte Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend

$\Rightarrow$ Punkte, die diese Bedingung erfüllen, heißen stationäre Punkte

Satz 107 Sei $f(x, y) \in C^2$ in einer Umgebung des stationären Punktes (x_0, y_0) , d.h., die notwendigen Bedingungen für das Vorliegen eines relatives Extremum von f in (x_0, y_0)

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ und } f_y(x_0, y_0) = 0.$$

sind erfüllt. Ist dann

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} (x_0, y_0) > 0,$$

so ist (x_0, y_0) eine relativen Extremstelle (hinreichende Bedingung). Wenn dann

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad (\leftrightarrow f_{yy} < 0)$$

gilt, so liegt ein relatives Maximum vor. Wenn dann

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad (\leftrightarrow f_{yy} > 0)$$

gilt, so liegt ein relatives Minimum vor.

Falls $D < 0$ ist, so besitzt f einen Sattelpunkt (keinen Extremwert). Im Falle $D = 0$ ist keine Aussage möglich (andere Methoden bzw. höhere Ableitungen heranziehen).

Bemerkung 7 1) Ist die Funktion f auf einem abgeschlossenen Gebiet definiert, sind für das Auffinden von absoluten Extremstellen neben den kritischen Punkten auch die Randpunkte zu prüfen.

⇒ Satz von Weierstraß über stetige Funktionen auf abgeschlossenen Gebieten

2) Für Funktionen von n Variablen ist die Bedingung

$$\nabla f = \underline{0}$$

notwendig für das Vorliegen eines relativen Extremums. Es gibt hinreichende Bedingungen, die relativ kompliziert sind und erfordert die Untersuchung quadratischen Form der Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen auf Definitheit.

13.9.2 Extrema unter Nebenbedingungen

Allgemeine Aufgabenstellung:

$$z = f(\underline{x}) \rightarrow \text{Extremum unter den Nebenbedingungen } \varphi_k(\underline{x}) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

Spezialfall: $n = 2, m = 1$

Gesucht: Extrema von $z = f(x, y)$ unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = 0$$

Lösungsmöglichkeiten:

- 1) Auflösung der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ nach einer Variablen z.B. $y = \psi(x)$. Einsetzen in die Funktion $f(x, y)$ liefert die Extremwertaufgabe für eine Variable $f(x, \psi(x)) \rightarrow \text{Extremum}$.
- 2) **Satz 108 (Lagrangescher Multiplikator)** Ist (x_0, y_0) ein Extremum der Funktion $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$. Zusätzlich sei $\nabla\varphi \neq \underline{0}$. Dann gibt eine reelle Zahl λ (Lagrangescher Multiplikator) derart, dass für die Funktion

$$H(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

die Gleichungen

$$H_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0 \quad (1)$$

$$H_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0 \quad (2)$$

$$H_\lambda(x, y, \lambda) = \varphi(x, y) = 0. \quad (3)$$

$\Rightarrow$ Die Gleichungen (1) und (2) bedeuten, dass $\text{grad}f$ und $\text{grad}\varphi$ kollinear sind. Die dritte Gleichung ist die Nebenbedingung.

$\Rightarrow$ Allgemeine Aufgabe: Hilfsfunktion $H(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(\underline{x}) \rightarrow \text{Extremum}$

Bemerkung 8 Man untersucht nur die notwendigen Bedingungen und gewinnt Aussagen, ob ein Extremum vorliegt und welcher Art es ist, aus dem Sachverhalt der Aufgabenstellung.

$\Rightarrow$ Höhenlinienmethode

14 Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

14.1 Parameterintegrale

Definition 68 Sei $f(x, y)$ im Rechteck $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ definiert. Existiert für jedes feste $x \in [a, b]$ das Integral

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

so heißt es *Parameterintegral mit dem Parameter x* .

Satz 109 1) Ist f in R stetig, so ist auch F auf $[a, b]$ stetig.

2) Ist f in R stetig partiell nach x differenzierbar, so ist auch F in $[a, b]$ stetig nach x differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

Definition 69 1) $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich bezüglich der x -Achse*, falls es Zahlen $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ und zwei stetige Funktionen $h_1(x), h_2(x)$ gibt, so dass gilt:

$$B = \{(x, y) : a \leq x \leq b; h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}.$$

2) $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich bezüglich der y -Achse*, falls es Zahlen $c, d \in \mathbb{R}, c \leq d$ und zwei stetige Funktionen $g_1(y), g_2(y)$ gibt, so dass gilt:

$$B = \{(x, y) : c \leq y \leq d; g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}.$$

Definition 70 Sei $f(x, y)$ im Normalbereich $B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$ definiert. Existiert für jedes feste $x \in [a, b]$ das Integral

$$F(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy,$$

so heißt es Parameterintegral mit dem Parameter x und variablen Integrationsgrenzen.

Satz 110 1) Ist f in B und sind h_1 und h_2 stetig, so ist auch F auf $[a, b]$ stetig.

2) Ist f in B stetig partiell nach x differenzierbar, so ist auch F in $[a, b]$ stetig nach x differenzierbar sofern h_1 und h_2 es sind. Es gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy = \\ &= \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f_x(x, y) dy + h_2'(x)f(x, h_2(x)) - h_1'(x)f(x, h_1(x)). \end{aligned}$$

⇒ Analog für Normalbereiche bezüglich der y -Achse.

⇒ Uneigentliche Parameterintegrale

14.2 Ebene Bereichsintegrale

⇒ Problem der Volumenberechnung

1° Definition und Eigenschaften

Das Bereichsintegral wird in Verallgemeinerung des bestimmten Integrals durch folgende Schritte für ein beschränktes Gebiet $B \subset \mathbb{R}^2$ und eine über B definierte Funktion $z = f(x, y)$ erklärt:

- 1) Sei zunächst $f(x, y) \geq 0$.
- 2) Zerlegung von B in Teilbereiche $B_1, B_2, \dots, B_n$. Mit Δb_j wird der Flächeninhalt von B_j bezeichnet.
- 3) Wähle für jedes j mit (ξ_j, η_j) einen beliebigen Punkt aus B_j .
- 4) Dann ist $f(\xi_j, \eta_j)\Delta b_j$ das Volumen der Säule über dem Teilbereich B_j mit der Höhe $f(\xi_j, \eta_j)$.
- 5) Aufsummieren dieser Volumina der Teilbereiche liefert eine Näherung für das gesuchte Volumen $V \approx \sum_{j=1}^{\infty} f(\xi_j, \eta_j)\Delta b_j$.

Definition 71 Konvergieren die Summen $\sum_{j=1}^{\infty} f(\xi_j, \eta_j)\Delta b_j$ bei immer feiner werdender Zerlegung von B , d.h., für $n \rightarrow \infty$ und $\max \Delta b_j \rightarrow 0$, gegen einen Grenzwert, so nennt man die Funktion $z = f(x, y)$ über B integrierbar. Den Grenzwert heißt ebenes Bereichsintegral von $f(x, y)$ über B .

Bezeichnung:

$$\int \int_B f(x, y) db = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta b_j \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n f(\xi_j, \eta_j)\Delta b_j$$

⇒ Die Definition gilt auch, wenn die Bedingung $f(x, y) \geq 0$ verletzt ist.

⇒ Jede stetige Funktion ist integrierbar.

Satz 111 (Eigenschaften)

Die Funktionen $f(x, y), g(x, y)$ seien stetig über B . Dann gilt:

$$1) \int_B \int_B cf(x, y)db = c \int_B \int_B f(x, y)db$$

$$2) \int_B \int_B (f(x, y) + g(x, y))db = \int_B \int_B f(x, y)db + \int_B \int_B g(x, y)db$$

$$3) \text{ Falls } f(x, y) \leq g(x, y), \text{ so } \int_B \int_B f(x, y)db \leq \int_B \int_B g(x, y)db$$

$$4) \text{ Ist } m \leq f(x, y) \leq M \text{ und } |B| \text{ der Flächeninhalt von } B, \text{ so ist } m|B| \leq \int_B \int_B f(x, y)db \leq M|B|.$$

$$5) \text{ Für } B = B_1 \cup B_2 \text{ und } B_1 \cap B_2 = \emptyset \text{ gilt } \int_B \int_B f(x, y)db = \int_{B_1} \int_{B_1} f(x, y)db + \int_{B_2} \int_{B_2} f(x, y)db$$

2° Integration über Normalbereichen

Satz 112 1) Ist $B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$ ein Normalbereich bezüglich der x -Achse, so gilt

$$\int_B \int_B f(x, y)db = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

2) Sei $B = \{(x, y) : c \leq y \leq d; g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$ ein Normalbereich bezüglich der y -Achse, so gilt

$$\int_B \int_B f(x, y)db = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)dx \right) dy$$

Bemerkung 9 Ist B kein Normalbereich, so ist eine Zerlegung von B in Normalbereiche erforderlich (vergleiche Eigenschaften). Alle konvexen Bereiche und die meisten praktisch vorkommenden Gebiete mit glattem Rand lassen sich als Vereinigung von disjunkten Normalbereichen darstellen.

3° Anwendungen von Bereichsintegralen

- 1) **Flächeninhalt** F ebener Bereiche B

$$F = \int \int_B db.$$

- 2) **Volumen** zwischen $z = 0$ und $z = f(x, y)$ über B

$$V = \int \int_B f(x, y) db.$$

- 3) **Volumen** zwischen $z = g(x, y)$ und $z = f(x, y)$ mit $g(x, y) \leq f(x, y)$ über B

$$V = \int \int_B (f(x, y) - g(x, y)) db.$$

- 4) Sei $\rho(x, y)$ eine auf dem Bereich B stetige Flächendichte, dann ist die **Gesamtmasse** m des mit Masse belegten Bereichs gegeben durch

$$m = \int \int_B \rho(x, y) db.$$

⇒ Scheibe konstanter Dicke a

$$m = a \int \int_B \rho(x, y) db.$$

- 5) Die Koordinaten des **Schwerpunktes** eines ebenen Bereiches mit der Flächendichte $\rho(x, y)$

$$x_s = \frac{1}{m} \int \int_B x \rho(x, y) db, \quad y_s = \frac{1}{m} \int \int_B y \rho(x, y) db.$$

- 6) Daraus erhält man die **statischen Momente** von B bezüglich der x - bzw. y -Achse als

$$M_x = m \cdot y_s = \int_B \int_B y \rho(x, y) db, \quad M_y = m \cdot x_s = \int_B \int_B x \rho(x, y) db.$$

- 7) Die (Flächen-) **Trägheitsmomente** bezüglich der x - bzw. y -Achse ergeben sich als

$$J_x = \int_B \int_B y^2 \rho(x, y) db, \quad J_y = m \cdot y_s = \int_B \int_B x^2 \rho(x, y) db.$$

- 8) **Ladung** Q von B mit Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$

$$Q = \int_B \int_B \sigma(x, y) db.$$

- 9) **Feldstärke** $\underline{E} = (E_x, E_y, E_z)^T$ des durch einen ebenen Bereich B mit Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$ erzeugten elektrostatischen Feldes im Punkt (x_0, y_0, z_0) ist:

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_B \int_B \frac{\underline{r}}{r^3} \sigma(x, y) db.$$

Dabei ist ϵ_0 die Influenzkonstante, $\underline{r} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0)^T$ und $r = |\underline{r}|$.

⇒ Uneigentliche Bereichsintegrale

14.3 Räumliche Bereichsintegrale

1° Definition und Eigenschaften

Das räumliche Bereichsintegral wird analog zum ebenen Bereichsintegral durch folgende Schritte für ein beschränktes Gebiet $B \subset \mathbb{R}^3$ und eine über B definierte Funktion $w = f(x, y, z)$ erklärt:

- 1) Zerlegung von B in Teilbereiche $B_1, B_2, \dots, B_n$. Mit ΔB_j wird der Rauminhalt von B_j bezeichnet.
- 2) Wähle für jedes j mit $(\xi_j, \eta_j, \varsigma_j)$ einen beliebigen Punkt aus B_j und bilde $f(\xi_j, \eta_j, \varsigma_j)\Delta B_j$.
- 3) Aufsummieren über j liefert eine Integralsumme $\sum_{j=1}^{\infty} f(\xi_j, \eta_j, \varsigma_j)\Delta B_j$.

Definition 72 Konvergieren die Summen $\sum_{j=1}^{\infty} f(\xi_j, \eta_j, \varsigma_j)\Delta B_j$ bei immer feiner werdender Zerlegung von B , d.h., für $n \rightarrow \infty$ und $\max \Delta B_j \rightarrow 0$, gegen einen Grenzwert, so nennt man die Funktion $w = f(x, y, z)$ über B integrierbar. Den Grenzwert heißt räumliches Bereichsintegral von $f(x, y, z)$ über B .

Bezeichnung:

$$\int \int \int_B f(x, y, z) dB = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta B_j \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n f(\xi_j, \eta_j, \varsigma_j) \Delta B_j$$

⇒ Jede stetige Funktion ist integrierbar.

⇒ Eigenschaften analog zu ebenen Bereichsintegralen vgl. Satz ??

2° Integration über Normalbereichen

Definition 73 $B \subset \mathbb{R}^3$ heißt räumlicher (x, y) -Normalbereich d.h., Normalbereich bezüglich der x, y -Ebene, falls

- 1) es Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \leq x_2$ und stetige Funktionen $y_1(x), y_2(x), z_1(x, y), z_2(x, y)$ gibt, so dass

$$B = \{(x, y, z) : x_1 \leq x \leq x_2, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

ist, oder

- 2) es Zahlen $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \leq y_2$ und stetige Funktionen $x_1(y), x_2(y), z_1(x, y), z_2(x, y)$ gibt, so dass B durch die Ungleichungen

$$B = \{(x, y, z) : y_1 \leq y \leq y_2, x_1(y) \leq x \leq x_2(y), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

beschrieben.

- 3) Analog kann man vier weitere Typen von Normalbereichen definieren.

Satz 113 Ist B ein (x, y) -Normalbereich, so gilt

$$\int_B \int f(x, y, z) dB = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

oder

2)

$$\int_B \int f(x, y, z) dB = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy .$$

$\Rightarrow$ Falls $B \subset \mathbb{R}^3$ kein Normalbereich ist, muss er in Normalbereiche zerlegt werden (siehe Bemerkung ??).

$\Rightarrow$ n -dimensionale Integrale, n -dimensionale Normalbereiche

3° Anwendungen von räumlichen Bereichsintegralen

- 1) **Volumen** V eines räumlichen Bereiches B

$$V = \int \int \int_B dB.$$

- 2) Sei $\rho(x, y, z)$ eine auf dem Bereich B stetige Dichte, dann ist die **Gesamtmasse** m gegeben durch

$$m = \int \int \int_B \rho(x, y, z) dB.$$

- 3) Die **Koordinaten des Schwerpunktes** eines ebenen Bereiches mit der stetigen Dichte $\rho(x, y, z)$

$$x_s = \frac{1}{m} \int \int \int_B x \rho(x, y, z) dB, \quad y_s = \frac{1}{m} \int \int \int_B y \rho(x, y, z) dB, \quad z_s = \frac{1}{m} \int \int \int_B z \rho(x, y, z) dB.$$

⇒ Den geometrischen Schwerpunkt erhält daraus mit

$$(\rho(x, y, z) = \rho_0 = \frac{m}{V}).$$

- 4) Das **statische Moment** von B bezüglich der x, y -Ebene ist

$$M_{xy} = m \cdot z_s = \int \int \int_B z \rho(x, y, z) dB.$$

- 5) Das **Trägheitsmoment** J ($= J_{E_0}$ bzw. J_{g_0} bzw. J_{P_0}) eines räumlichen Bereiches mit der ortsabhängigen Dichte $\rho(x, y, z)$ ist

$$J = \int \int \int_B r^2 \rho(x, y, z) dB .$$

Dabei ist $r(x, y, z)$ der Abstand des variablen Punktes $P(x, y, z)$ von E_0 bzw. g_0 bzw. P_0 , je nachdem, ob es sich um das planare, axiale oder polare Trägheitsmoment $J = J_{E_0}$ bzw. $J = J_{g_0}$ bzw. $J = J_{P_0}$ handelt.

Falls E_0 die x, y -Ebene ist, ist $r^2 = z^2$.

Falls g_0 die x -Achse ist, ist $r^2 = y^2 + z^2$.

Falls P_0 der Koordinatenursprung ist, ist $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

⇒ Uneigentliche räumliche Bereichsintegrale

3° **Krummlinige Koordinaten und Substitutionsregel für räumliche Bereichsintegrale**

⇒ Ziel: Vereinfachung der Integrationsgrenzen oder des Integranden durch eine geeignete Substitution

- 1) $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sei in kartesischen Koordinaten gegeben. Weiterhin bezeichnen $u_i, i = 1, \dots, n$ krummlinige Koordinaten.
- 2) Sei $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subset \mathbb{R}^n$ und $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in B' \subset \mathbb{R}^n$. Zwischen B und B' existiere eine eindeutige Abbildungsvorschrift T :

$$u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow x_i = x_i(u_1, \dots, u_n), i = 1, 2, \dots, n.$$

- 3) Alle vorkommenden Funktionen seien stetig differenzierbar.

Definition 74 Die Determinante

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

heißt Funktionaldeterminante der Abbildung T . Spezialfälle im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Bemerkung 10 1) Spezialfall Polarkoordinaten: Aus

$$x = x(r, \varphi) = r \cos \varphi, \quad y = y(r, \varphi) = r \sin \varphi$$

$$\text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{erhält man} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r.$$

2) Spezialfall Zylinderkoordinaten: Aus

$$x = x(r, \varphi, z) = r \cos \varphi, \quad y = y(r, \varphi, z) = r \sin \varphi, \quad z = z$$

$$\text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{erhält man} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r.$$

3) Spezialfall Kugelkoordinaten (räumliche Polarkoordinaten): Aus

$$x = x(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = y(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

$$\text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad \text{erhält man} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta.$$

Satz 114 Gegeben sei das Integral $\int_B f(x, y) db$. Zwischen $B \subset \mathbb{R}^2$ und $B' \subset \mathbb{R}^2$ existiere eine eindeutige Transformation $T : x = x(u, v), y = y(u, v)$ mit stetigen partiellen Ableitungen und positiver Funktionaldeterminante. Dann gilt die Transformationsformel:

$$\int_B f(x, y) db = \int_{B'} \tilde{f}(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} db'$$

mit $\tilde{f}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

⇒ Vergleich mit der Transformationsformel für bestimmte Integrale

Bemerkung 11 1) Die Voraussetzung 'T ist umkehrbar eindeutig' braucht für die Randpunkte von B nicht unbedingt erfüllt sein.

2) Es genügt, wenn die Funktionaldeterminante im Innern von B nicht verschwindet.

3) Im Falle, dass die Funktionaldeterminante kleiner als Null ist, kann das Vorzeichen durch Vertauschung von u und v geändert werden.

4) Das auf der rechten Seite stehende Integral $\int_{B'} \tilde{f}(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} db'$ ist ein Bereichsintegral über B' : $\int_{B'} \Phi(u, v) db'$ mit $\Phi(u, v) = \tilde{f}(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$. Es wird berechnet mit Hilfe von Normalbereichen in der u, v-Ebene.

Satz 115 Sei $B' \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich des u, v, w-Raumes, der durch die Abbildung

$$T : x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$$

umkehrbar eindeutig auf den Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ des x, y, z-Raumes abgebildet wird. Die Transformation T besitze stetige partielle Ableitungen und eine positive Funktionaldeterminante. Dann gilt die Transformationsformel:

$$\int_B f(x, y, z) dB = \int_{B'} \tilde{f}(u, v, w) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} dB'$$

mit $\tilde{f}(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$.

⇒ Es gelten analoge Ausführungen wie beim Doppelintegral (Vgl. Bemerkung 11).

15 Gewöhnliche Differentialgleichungen

15.1 Grundbegriffe

DGL sind Gleichungen in denen Funktionen und Ableitungen auftreten.

Einteilung der Differentialgleichungen

- 1) Nach Anzahl der unabhängigen Variablen: gewöhnliche, partielle DGL,
- 2) nach der höchsten vorkommenden Ableitung: DGL 1. oder höherer Ordnung,
- 3) nach Anzahl der gesuchten Funktionen: skalare DGL oder System von DGL,
- 4) nach weiteren Besonderheiten des funktionalen Zusammenhangs zwischen gesuchter Funktion und deren Ableitungen:
lineare/ nichtlineare DGL.

Definition 75 Eine gewöhnliche DGL n -ter Ordnung ist eine Gleichung zwischen der unabhängigen Veränderlichen x , der abhängigen Veränderlichen y und den Ableitungen $y', y'', \dots, y^{(n)}$. Sie hat für $x \in D \subset \mathbb{R}$ die allgemeine Form

$$F[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}] = 0.$$

Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung heißt die Ordnung der DGL.

Definition 76 Die Lösung einer DGL n -ter Ordnung ist jede n -mal stetig differenzierbare Funktion, die mit ihren Ableitungen in die Differentialgleichung eingesetzt, diese für alle $x \in D$ zu einer Identität macht. Eine einzelne Funktion, die Lösung ist, heißt spezielle oder **partikuläre Lösung** der DGL. Die **allgemeine Lösung** einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist die Gesamtheit aller Funktionen, die Lösung der DGL sind.

Bemerkung 12 Geometrisch stellt die allgemeine Lösung der DGL n -ter Ordnung eine n -parametrische Kurvenschar dar. Differentialgleichung und allgemeine Lösung sind äquivalente Ausdrucksformen für denselben physikalischen oder geometrischen Sachverhalt.

Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung enthält somit in der Regel n freie Integrationskonstanten. Um eine spezielle Lösung zu erhalten, werden Zusatzbedingungen gestellt.

Definition 77 1) Wenn in den Gleichungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten die Werte der unbekanntten Funktion oder ihrer Ableitungen für eine (einzige) Stelle $x_0 \in D$ gestellt werden, so werden diese als Anfangsbedingungen bezeichnet. Eine Differentialgleichung mit zugehörigen Anfangsbedingungen heißt Anfangswertaufgabe oder Anfangswertproblem (AWP).

2) Wenn in den Gleichungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten die Werte der unbekanntten Funktion oder ihrer Ableitungen an mindestens zwei Stellen vorkommen, spricht man von Randbedingungen. Eine Aufgabe, bestehend aus einer Differentialgleichung und aus Randbedingungen, heißt Randwertaufgabe oder Randwertproblem (RWP).

Lösungsmethoden

- 1) Analytische Verfahren (für einfache DGL 1. Ordnung)
- 2) Grafische Verfahren (Richtungsfeld für DGL 1. Ordnung)
- 3) Numerische Methoden (oft bei Anwendungs-DGL unvermeidbar)

15.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

15.2.1 Allgemeines und Richtungsfeld

⇒ Allgemeine Gestalt von Differentialgleichungen erster Ordnung, AWP

⇒ Partikuläre Lösung, Integralkurve

⇒ Allgemeine Lösung, Richtungsfeld

⇒ Zeichnerische Lösung mittels Richtungsfeld

15.2.2 Existenz und Eindeutigkeit, Sukzessive Approximation

Satz 116 (Picard-Lindelöf) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(x, y)$ in D stetig nach y differenzierbar. Dann hat das AWP

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y_0 &= y(x_0)\end{aligned}$$

für jedes $(x_0, y_0) \in D$ eine eindeutig bestimmte Lösung.

Zunächst ist:

$$y' = f(x, y) \Leftrightarrow \int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \Leftrightarrow y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Die Differentialgleichung und die Integralgleichung sind äquivalent. Man kann sie durch die folgende Iteration (**sukzessive Approximation**) lösen:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt.$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes konvergiert die Folge der Näherungen für $n \rightarrow \infty$ gegen die exakte Lösung des AWP's.

15.2.3 Einfache DGL 1. Ordnung, elementare Integrationsmethoden

1) Produkttyp: $y' = g(x) \cdot h(y)$

⇒ Spezialfälle

$$y' = g(x) \quad \text{und} \quad y' = h(y)$$

Lösungsmethode: Trennung der Variablen. Falls $h(y) > 0$ bzw. $h(y) < 0$ geht man wie folgt vor:

- $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ umformen zu $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$.
- Integrieren: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$.
- Das ergibt $H(y) = G(x) + C$ und wird möglichst nach y aufgelöst.
- Im Falle des AWP mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ wird C so berechnet, dass $H(y_0) = G(x_0) + C_0$ erfüllt ist, z.B., indem man gleich $\int_{y_0}^y \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^x g(x) dx$ rechnet.

Im Falle $h(y_0) = 0$ ist $y = y_0$ Lösung des AWP's.

2) Separierbare Differentialgleichung:

$$y' = f(ax + by + c) \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } b \neq 0$$

Man substituiert $z = ax + by(x) + c$ und erhält $z' = a + by' = a + b \cdot f(x)$ und damit die DGL vom Produkttyp $z' = a + b \cdot f(x)$. Aus der Lösung $z(x)$ wird durch Rücksubstitution $y = \frac{z - ax - c}{b}$ die Lösung der Ausgangsgleichung berechnet.

3) Ähnlichkeitsdifferentialgleichung: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Man substituiert $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ oder $y(x) = xz(x)$. Mit $y' = z + xz'$ erhält man die DGL vom Produkttyp $xz' + z = f(z)$. Aus der Lösung $z(x)$ wird durch Rücksubstitution $y = xz$ die Lösung der Ausgangsgleichung berechnet.

4) **Lineare Differentialgleichung:** $y' + p(x)y = q(x)$

- Bestimmung der allgemeinen Lösung $y_h(x) = c \cdot \varphi(x)$ der zugehörigen homogenen DGL $y' + p(x)y = 0$ (Produkttyp!).
- Bestimmung einer speziellen Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten mit dem Ansatz $y_i = c(x) \cdot \varphi(x)$. Nach der Berechnung von $c(x)$ ergibt sich y_i .
- Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_i = c \cdot \varphi(x) + y_i$.
- Falls eine Anfangsbedingung gestellt ist, wird das c in der letzten Gleichung berechnen.

5) **Bernoullische Differentialgleichung:** $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$

- Multiplikation der DGL mit $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ liefert $(1 - \alpha)y^{-\alpha}y' + p(x)(1 - \alpha)y^{1-\alpha} = (1 - \alpha)q(x)$.
- Substitution $z = y^{1-\alpha}$ liefert mit $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$ die lineare DGL $z' + p(x)(1 - \alpha)z = (1 - \alpha)q(x)$.
- Lösen und Rücksubstitution.

6) **Exakte Differentialgleichung, integrierender Faktor:**

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

- DGL heißt exakt, falls $f dx + g dy$ ist das totale Differential einer Funktion $F(x, y)$ (Stammfunktion, Potential), d.h., $dF = f dx + g dy$.
- Die Bedingung $f_y = g_x$ ist notwendig und hinreichend, für die Exaktheit der DGL.
- In diesem Fall ist $F_x = f$ und $F_y = g$ und man erhält daraus die Lösungen der DGL: $F(x, y) = c$ durch Integration.
- Falls die DGL nicht exakt ist, so wird ein **integrierender Faktor** (Eulerscher Multiplikator) $\mu(x, y)$ gesucht, so dass

$$(\mu(x, y)f(x, y))dx + (\mu(x, y)g(x, y))dy = 0$$

exakt ist.

- Der integrierende Faktor wird über die partielle DGL bestimmt

$$f\mu_y - g\mu_x + \mu(f_y - g_x) = 0.$$

- Spezielle Ansätze: $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$, $\mu = \mu(xy)$ führen leichter zum Ziel. Wenn $\frac{f_y - g_x}{g}$ von y unabhängig ist, existiert ein integrierender Faktor $\mu = \mu(x)$.

Wenn $\frac{f_y - g_x}{f}$ von x unabhängig ist, existiert ein integrierender Faktor $\mu = \mu(y)$.

15.2.4 Numerische Lösungsverfahren für AWP von DGL'n 1. Ordnung

Gegeben sei für $x \in [a, b]$ das AWP :

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y_0 &= y(x_0).\end{aligned}$$

Vereinbart werden die Bezeichnungen

$$x_0 = a, h = \frac{b-a}{N}, x_n = x_0 + nh, n = 0, 1, \dots, N.$$

Die exakte Lösung an den Punkten x_n ist $y(x_n)$, die Näherung wird mit y_n bezeichnet, d.h., $y_n \approx y(x_n)$.

- 1) Eulersches Polygonzugverfahren (Rechteckregel):

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)}$$

- 2) Verbessertes Polygonzugverfahren (Rechteckregel am Intervallmittelpunkt):

$$y_{n+1}^I = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+1}^I\right),$$

oder $\boxed{y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)}$

- 3) Euler-Heun-Verfahren (Trapezregel):

$$y_{n+1}^I = y_n + hf(x_n, y_n), y_{n+1}^{II} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^I),$$

oder $\boxed{y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_{n+1}^I + y_{n+1}^{II}) = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^I))}$

- 4) Runge-Kutta-Verfahren (Keplersche Faßregel):

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \approx hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \approx hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) \\ k_4 &= hf(x_{n+1}, y_n + k_3) \approx hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \\ k &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + k}$$

$\Rightarrow$ Faustregel: Man wähle h so klein, daß $\frac{|k_2 - k_3|}{|k_1 - k_2|} < 0.05$ gilt.

$\Rightarrow$ Konvergenzordnung

15.3 DGL höherer Ordnung

15.3.1 Allgemeine Bemerkungen

AWP:

$$\begin{aligned}y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\y(x_0) &= y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}\end{aligned}$$

Satz 117 *Ist die Funktion $f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \in C^1(B)$ mit $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und gehört der Punkt $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ zu B , so ist die Existenz und Unität der Lösung für das obige AWP gesichert.*

Definition 78 *Die durch $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ gegebene implizite Funktion $y(x)$ heißt allgemeine Lösung der DGL $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, wenn die durch Auflösung von Φ nach y entstehenden Funktionen $y = y(x)$ die DGL erfüllen und sie nicht mit weniger als n solchen Parametern dargestellt werden können. Die (partikuläre) Lösung des AWP's erhält man durch Elimination der willkürlichen Konstanten mit Hilfe der Anfangsbedingungen.*

Satz 118 *Sind die Voraussetzungen von Satz 117 erfüllt, so ist jede Lösung des AWP's in der allgemeinen Lösung enthalten.*

15.3.2 Einige Sonderfälle von im allgemeinen nichtlinearen DGL 2. Ordnung

Allgemeine Form:

$$y'' = f(x, y, y')$$

1) $y'' = f(x)$ Zweimal integrieren.

2) $y'' = f(y)$ Energiemethode

- Multiplikation der Gleichung mit $y' \neq 0$: $y'y'' = y'f(y)$
- oder $\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}(y')^2) = y'f(y)$
- durch Integration nach x :

$$\frac{1}{2}(y')^2 = \int y'f(y)dx = \int f(y)dy$$

- Daraus erhält man die DGL $y' = \pm\sqrt{\int f(y)dy + C}$ (Produkttyp).

Achtung ! Scheinlösungen

Die Funktion $y(x) = c$ ist Lösung von $y'y'' = y'f(y)$. Sie ist aber nur Lösung der Ausgangsgleichung $y'' = f(y)$, falls auch $f(c) = 0$ gilt.

3) $y'' = f(x, y')$

- $y'(x) = p(x)$ setzen,
- lösen DGL 1. Ordnung $p' = f(x, p)$,
- Rücksubstitution: $y = \int p(x) dx$.

15.3.3 Lineare DGL höherer Ordnung

Für $x \in D \subset \mathbb{R}$ hat die lineare DGL n-ter Ordnung die Gestalt

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

mit der Störfunktion $f(x)$. Ist $f(x) \equiv 0$, so heißt die DGL homogen, sonst inhomogen.

Satz 119 Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der inhomogenen DGL, so erfüllt die Differenz $y_1(x) - y_2(x)$ die homogene DGL.

Satz 120 Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen DGL ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y_h(x) = y_h(x, C_1, \dots, C_n)$ und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL, d.h.,

$$y(x, C_1, \dots, C_n) = y_h(x, C_1, \dots, C_n) + y_p(x).$$

Struktur der Lösung der homogenen DGL

Definition 79 (Lineare Unabhängigkeit) Die Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ heißen linear unabhängig, wenn aus

$$\sum_{k=1}^n c_k f_k(x) \equiv 0$$

die Gleichungen $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ folgen.

Satz 121 Die allgemeine Lösung der linearen homogenen DGL hat die folgende Struktur:

$$y_h(x, C_1, \dots, C_n) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$$

wobei die Funktionen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL sind. Sie bilden das sogenannte **Fundamentalsystem**.

Definition 80 Sind die Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ aus C^{n-1} in ihrem gemeinsamen Definitionsbereich D , so ist

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

die Wronskische Determinante.

Satz 122 Die Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ der linearen DGL n -ter Ordnung

$$L[y] = 0$$

sind genau dann linear unabhängig d.h., sie bilden ein Fundamentalsystem, wenn ihre Wronskische Determinante $W(x) \neq 0$ für alle $x \in D$.

Bemerkung 13 Man kann die Aussage verschärfen:

Die Funktionen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem der linearen DGL n -ter Ordnung $L[y] = 0$, wenn es ein $x_0 \in D$ gibt für das die Wronskische Determinante $W(x_0) \neq 0$ ist.

$\Rightarrow$ DGL mit beliebigen Koeffizientenfunktionen $a_k(x)$ können i.a. nicht analytisch gelöst werden.

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Die DGL

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ kann analytisch gelöst werden.**Berechnung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL** $\Rightarrow$ e -Ansatz, charakteristische Gleichung**Satz 123** *Hat die zur DGL $L[y] = 0$ gehörige charakteristische Gleichung*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \dots + a_1\lambda' + a_0y = 0$$

die Lösung λ_k mit der Vielfachheit $l_k \geq 1$, so sind die Funktionen

$$e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k-1} e^{\lambda_k x}$$

linear unabhängige Lösungen und damit Bestandteil eines Fundamentalsystems der DGL $L[y] = 0$. $\Rightarrow$ Allgemeine Lösung der homogenen DGL ist die lineare Hülle des Fundamentalsystems**Achtung !** Die Nullstelle λ_k von $P(\lambda)$ kann komplex sein.**Bemerkung 14** *In diesem Fall: Übergang zu einem reellen Fundamentalsystem: Die Lösungen $x^\mu e^{(\alpha_k + i\beta_k)x}$ und $x^\mu e^{(\alpha_k - i\beta_k)x}$ werden durch die Lösungen $x^\mu e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x)$, $x^\mu e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x)$ im Fundamentalsystem ersetzt. So erhält man ein Fundamentalsystem von n reellen Lösungen. Die allgemeine Lösung besteht aus allen Linearkombinationen des Fundamentalsystems. Die n beliebigen Konstanten sind ebenfalls reell.*

Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL

1) Variation der Konstanten:

- Sei $y_h(x) = \sum_{k_1}^n C_k y_k(x)$. Dann wird ein spezielle Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL $L[y] = f$ mit Hilfe des Ansatzes:

$$y_p(x) = \sum_{k_1}^n C_k(x) y_k(x)$$

berechnet.

- Die n unbekanntenen Funktionen $C'_k(x)$ werden aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} C'_1(x)y_1(x) & + & C'_2(x)y_2(x) & & + \dots + & C'_n(x)y_n(x) & = 0 \\ C'_1(x)y'_1(x) & + & C'_2(x)y'_2(x) & & + \dots + & C'_n(x)y'_n(x) & = 0 \\ & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ C'_1(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & C'_2(x)y_2^{(n-2)}(x) & & + \dots + & C'_n(x)y_n^{(n-2)}(x) & = 0 \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & C'_2(x)y_2^{(n-1)}(x) & & + \dots + & C'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) & = f(x) \end{array}$$

berechnet.

- Durch Integration der $C'_k(x)$ und Einsetzen in den Ansatz erhält man y_p .

Bemerkung 15 Das LGS für die C'_k ist eindeutig lösbar, da die Koeffizientendeterminante die Wronskische Determinante eines Fundamentalsystems ist.

2) Ansatzmethode:

Satz 124 Die Störfunktion f der linearen DGL mit konstanten Koeffizienten $L[y] = f$ habe die Gestalt

$$f(x) = G_k(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + H_l(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Hierbei sind $G_k(x)$ und $H_l(x)$ Polynome k -ten bzw. l -ten Grades. Wenn $\lambda = \alpha + i\beta$ eine μ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ ist, so kann eine spezielle Lösung y_p mit Hilfe des Ansatzes

$$y_p(x) = x^{\mu-1}(U_m(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + V_m(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x))$$

mit den unbekanntenen Polynomen $U_m(x)$ und $V_m(x)$ vom Grade $m = \max\{k, l\}$ berechnet werden. Ist f eine Summe derartiger Funktionen, so wird eine Summe derartiger Ansätze verwendet. Durch Einsetzen in die DGL und Koeffizientenvergleich wird y_p berechnet.

⇒ Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL und AWP.

15.4 Potenzreihenansatz

Die Lösung $y(x)$ einer DGL wird in Form einer Potenzreihe mit Hilfe des Ansatzes

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

gesucht.

Anwendungen:

- 1) Auf dem Intervall I gegebene DGL 1. Ordnung:

$$y' = f(x, y), \quad x \in I$$

•

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = f(x, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n).$$

- Wenn sich die rechte Seite als Potenzreihe entwickeln lässt, dann kann man die unbekannten Koeffizienten a_n durch Koeffizientenvergleich (Rekursionsformeln) bestimmen.
- Prüfen, ob die gewonnene Reihe konvergiert und eine Lösung der DGL darstellt.

- 2) Lösung der homogenen linearen DGL für $x \in I$:

$$y''(x) + g_1(x)y'(x) + g_2(x)y(x) = 0.$$

- Sei $x_0 \in I$ ein Punkt, in dessen Umgebung sich $g_1(x)$ und $g_2(x)$ in Potenzreihen entwickeln lassen (regulärer Punkt).
- Dann ist $y(x)$ in dieser Umgebung als Potenzreihe darstellbar:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Die a_n sind unbekannt.

- Mit $g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ und $g_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ und der Bezeichnung $z = x - x_0$ erhält man nach Differentiation (der Potenzreihe) und Einsetzen des Ansatzes in die DGL:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

- Ausmultiplizieren (Cauchy-Produkt) und Ordnen nach Potenzen von z :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \left\{ (n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{l=0}^n [b_l(n-l+1)a_{n-l+1} + c_l a_{n-l}] \right\} = 0$$

- Die Potenzreihe verschwindet nur, wenn alle Koeffizienten verschwinden:

$$n = 0 \quad 2a_2 + b_0a_1 + c_0a_0 = 0$$

$$n = 1 \quad 2 \cdot 3a_3 + 2b_0a_2 + c_0a_1 + b_1a_1 + c_1a_0 = 0$$

usw.

$$a_2 = \frac{1}{2}(b_0a_1 + c_0a_0)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{3}b_0a_2 - \frac{1}{6}(c_0 + b_1)a_1 - \frac{1}{6}c_1a_0 = \\ &= \frac{1}{6}(b_0^2 - c_0 - b_1)a_1 + \frac{1}{6}(c_0b_0 - c_1)a_0 \end{aligned}$$

- Ergebnis: Potenzreihe mit willkürlichen Koeffizienten a_0 und a_1 . Alle weiteren Koeffizienten a_i mit $i \geq 2$ sind Linearkombinationen von a_0 und a_1 , d.h., die allgemeine Lösung der DGL hat die Gestalt

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x)$$

mit den linear unabhängigen Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$.

16 Partielle Differentialgleichungen

16.1 Begriff und Klassifikation

Definition 81 Jede Gleichung der Form

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots) = 0$$

die die unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$, eine Funktion u dieser Variablen und ihre Ableitungen miteinander verknüpft, heißt eine **partielle Differentialgleichung** (PDG). Die höchste auftretende Ordnung der partiellen Ableitungen heißt die Ordnung der PDG.

Definition 82 Die Gesamtheit der Lösungen einer PDG heißt allgemeine Lösung.

Berühmte Beispiele:

- 1) Wellengleichung (eindimensional):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

Die Konstante a ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit und $u(x, t)$ ist die Auslenkung an einer Stelle x zur Zeit t , $f(x, t)$ ist eine äußere Kraft.

- 2) Wellengleichung (mehrdimensional):

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f \text{ im } \mathbb{R}^2$$

oder

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f.$$

- 3) Wärmeleitungs-, Diffusionsgleichung

$$u_t = a^2 \Delta u \text{ mit } u = u(x, y, z),$$

- 4) stationäre (zeitunabhängige) Gleichungen:

aus 2) wird die Poissongleichung $\Delta u = f$

aus 3) wird die Laplacegleichung $\Delta u = 0$

Bemerkung 16 1) Die Anzahl (der Mannigfaltigkeiten) der Lösungen von PDG ist viel größer als bei gewöhnlichen DGL.

2) Wenn m die Ordnung der DGL ist, entsprechen den m willkürlichen Konstanten bei gewöhnlichen DGL m willkürliche Funktionen.

3) Die m Funktionen hängen von $n - 1$ Variablen ab, wenn n die Anzahl der Variablen der PDG ist.

Spezialfall: $n = 2$, DGL 1. und 2. Ordnung

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yx}, u_{xx}, u_{yy}) = 0$$

⇒ Satz von Schwartz: $u_{xy} = u_{yx}$.

Achtung ! Die abkürzenden Schreibweisen $p = u_x$ und $q = u_y$ werden in der Literatur oft verwendet.

Definition 83 *Lösung einer PDG ist jede Funktion $u = u(x, y)$, die die vorige Gleichung in jedem Punkt (x, y) eines vorgegebenen Gebietes $G \subset \mathbb{R}^2$ erfüllt.*

Definition 84 *Eine PDG heißt linear, wenn die unbekannte Funktion u und alle ihre partiellen Ableitungen in linearer Form auftreten.*

⇒ Die berühmten PDG sind linear.

Definition 85 *Eine lineare PDG heißt homogen, wenn kein Summand vorkommt, der nicht $u(x, y)$ oder eine partielle Ableitung von u enthält.*

⇒ Auf gewöhnliche DGL zurückführbare PDG

16.2 PDG 1. Ordnung

16.2.1 Lineare PDG

- 1) Lineare PDG 1. Ordnung:

Für $(x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2$ ist die Lösung $u(x, y)$ der PDG gesucht

$$a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y) + b(x, y)u(x, y) + c(x, y) = 0.$$

Sie heißt **homogen** falls $\forall (x, y) \in G : c(x, y) \equiv 0$ (sonst inhomogen).

- 2) Will man die inhomogene PDG lösen, wird zunächst die verkürzte homogene PDG ($b(x,y)=c(x,y)=0$):

$$\underline{a}(x, y) \cdot \nabla u = 0$$

gelöst. Darauf wird jetzt eingegangen.

Wenn $(x(t), y(t))$ eine Parametrisierung der Höhenlinie von $u = u(x, y)$ ist, so ist $c = u(x(t), y(t))$. Dann folgt

$$\frac{du}{dt} = x'(t)u_x(x(t), y(t)) + y'(t)u_y(x(t), y(t)) = 0.$$

Aus dem Vergleich mit

$$a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y) = 0$$

folgert man die Proportionalität von x' mit a_1 und y' mit a_2 .

Die Proportionalitätskonstanten können als 1 gewählt werden.

Definition 86 *Das der PDG $\underline{a}(x, y) \cdot \nabla u = 0$ zugeordnete System gewöhnlich DGL 1. Ordnung:*

$$x'(t) = a_1(x(t), y(t)), \quad y'(t) = a_2(x(t), y(t))$$

heißt **charakteristisches System** der PDG. Die Lösungen $x = x(t), y = y(t)$ des Systems heißen **Grundcharakteristiken**. Als **Charakteristik** bezeichnet man jede jede Kurve im $\mathbb{R}^3$ mit der Parameterdarstellung $x(t), y(t)$ und $u(t) = c$.

Der folgende Sachverhalt läßt sich auf höhere Dimensionen übertragen.

Satz 125 *Sind die Funktionen $a_1, a_2 \in C^1(G)$ und in keinem Punkt von G gleichzeitig Null, so ist jede Funktion $u(x, y) \in C^1(G)$ genau dann Lösung der verkürzten PDG, wenn sie längs der Grundcharakteristik konstant ist.*

- 3) AWP: Bei gewöhnlichen DGL 1. Ordnung wird ein Wert an einem Punkt vorgegeben, jetzt werden Werte auf einer Anfangskurve vorgegeben.

Beispiel: Gesucht ist die Lösung der $yu_x - xu_y = 0$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Lösung: Charakteristisches System:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y && \text{oder einfacher } y' = -\frac{x}{y}. \\ y'(t) &= -x \end{aligned}$$

Die Lösung des Systems bzw. der Gleichung (d.h. die Grundcharakteristik) ist die Kreisschar $x^2 + y^2 = C^2$.

Die Höhenlinien der gesuchten Flächen (Lösungsmannigfaltigkeiten) sind Kreise. Daraus erhält man durch eine Zusatzbedingung verschiedene Lösungsmengen:

- Fragt man nach der Lösung die die Gerade durch den Koordinatenursprung $\underline{r} = (x, y, u)^T = (t, t, t)^T$ enthält, so findet man

$$\text{durch Einsetzen: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2t^2 \\ u = t. \end{cases} \quad \text{Das ist ein Drehkegel}$$

(Elimination von t) $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}r$, der durch Rotation der gegebenen Geraden um die z -Achse entsteht.

- Sucht man die Lösungsfläche, die die zur u -Achse windschiefe Gerade $\underline{r} = (1, t, t)^T$ enthält, so ergibt sich durch Einsetzen:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t^2 + 1 \\ u = t. \end{cases}$$

Das ist das einschalige Hyperboloid $x^2 + y^2 - u^2 = 1$.

$\Rightarrow$ Bedingungen für die Existenz und die Anzahl von Lösungen in Abhängigkeit von der Lage der Anfangskurve bzw. ihrer Projektion in die x, y -Ebene zu den Charakteristiken bzw. den Grundcharakteristiken.

-
- 4) Wenn die Anzahl der unabhängigen Variablen $n > 2$ ist, werden ähnlich wie bei gewöhnlichen DGL, Fundamentalsystem (Integralbasis) und allgemeine Lösung untersucht.

⇒ Linear abhängige (unabhängige) Funktionen werden jetzt mit Hilfe des Ranges der Jacobische Funktionalmatrix

$$J(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

(anstelle der Wronskischen Determinante) untersucht.

- 5) Hat man die verkürzte PDG

$$\underline{a}(x, y) \cdot \nabla u = 0$$

gelöst, so wird die vollständige Gleichung durch eine Variablentransformation zu einer lösbaren Gleichung (gewöhnliche DGL) umgeformt und gelöst.

- 6) Die nächstkompliziertere PDG ist die quasilinearen PDG. Das Vorgehen bei ihrer Lösung ist ähnlich.

16.3 PDG 2. Ordnung

Beschränkung auf lineare PDG 2. Ordnung

- 1) Allgemeine Gestalt:

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u = g$$

- 2) Man unterscheidet je nach Wert der Diskriminante den

$$D = b^2 - ac = \begin{cases} > 0 & \text{hyperbolischen Fall,} \\ = 0 & \text{parabolischen Fall,} \\ < 0 & \text{elliptischen Fall.} \end{cases}$$

Bemerkung 17 Da a, b, c Funktionen von x und y sind, ist auch D vom Punkt $(x, y) \in G$ abhängig. Der vorliegende Fall kann beim Verändern des Punktes wechseln. Beispielsweise ist die Tricomi-Gleichung

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

(Aerodynamik) in der Halbebene $y > 0$ elliptisch, für $y < 0$ hyperbolisch und für $y = 0$ parabolisch.

- 3) Die Einteilung der Fälle nach Vorzeichen der Diskriminante erscheint willkürlich. Der vorliegende Typ der PDG ist entscheidend für wesentliche Eigenschaften der Lösung. Er findet seine Entsprechung in der Natur. Stationäre Probleme oder Zustände werden durch elliptische, Ausbreitungsprozesse oder Wellen durch parabolische und hyperbolische PDG beschrieben.
- 4) Zur Lösung einer PDG 2. Ordnung wird sie auf (einfache) Normalform transformiert. Werden die neuen Variablen wieder x und y genannt, so haben die Normalformen die Gestalt:

- Hyperbolischer Fall:

$$u_{xy} = \Phi_1(x, y, u, u_x, u_y)$$

- Elliptischer Fall:

$$u_{xx} + u_{yy} = \Phi_2(x, y, u, u_x, u_y)$$

- Parabolischer Fall:

$$u_{xx} = \Phi_3(x, y, u, u_x, u_y)$$

-
- 5) Homogene PDG mit konstanten Koeffizienten lassen sich mittels Exponentialansatzes

$$u = e^{\alpha x + \beta y}$$

oder Produktansatz

$$u(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$$

lösen.

- 6) Man unterscheidet bei PDG wie bei gewöhnlichen DGL Anfangswert-, Randwert- und Eigenwertprobleme. (Anfangsrandwertaufgaben)