

Aufgabe 7.1

Auf der Menge $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}_2, b \in \mathbb{Z}_3\}$ wird eine Operation \oplus wie folgt definiert:

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c \pmod{2}, b + d \pmod{3})$$

Stellen Sie die Verknüpfungstafel auf und begründen Sie, dass $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 7.2

Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ isomorph zur \mathbb{Z}_6 ist.

Aufgabe 7.3

Es sei M die Menge aller Zahlen der Form $r + s \cdot \sqrt{3}$ mit $r, s \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass M mit Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

Aufgabe 7.4

Zerlegen Sie $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ über $\mathbb{F}_3 = GF(3)$ in Linearfaktoren.