1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Definition 1 *Eine Aussage ist ein sinnvoller Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.*

$\Rightarrow$ Aussageform

Definition 2 *Als Definitionsmenge einer Aussageform $p(x)$ bezeichnet man eine Menge D mit der Eigenschaft, dass für alle Elemente $x \in D$ die Aussageform $p(x)$ zu einer Aussage wird.*

$\Rightarrow$ All-Quantor $\forall$, Existenz-Quantor $\exists$

$\Rightarrow$ Operationen mit Aussagen, Wahrheitstafel

Definition 3 *Als Negation $\overline{p}$, Konjunktion (und) $p \wedge q$, Disjunktion (oder) $p \vee q$, Implikation $p \rightarrow q$ bzw. Äquivalenz $p \leftrightarrow q$ der Aussagen p und q bezeichnet man Aussagen mit der folgenden Wahrheitstafel:*

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

$\Rightarrow$ Gesetze der Aussagenlogik (de Morgan, Transitivität)

$\Rightarrow$ Tautologie, Kontradiktion

$\Rightarrow$ Der direkte Beweis

$\Rightarrow$ Die vollständige Induktion

$\Rightarrow$ Der indirekte Beweis

1.2 Mengenlehre

Definition 4 *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die zu einer Menge zusammengefassten Objekte heißen Elemente der Menge.*

Achtung ! Jedes Element kann in einer Menge nur einmal vorkommen!

$\Rightarrow$ $x \in M$ (Elemente - kleine Buchstaben, Mengen - große Buchstaben)

$\Rightarrow$ Definition von Mengen, Venn-Diagramme

Definition 5 *Zwei Mengen A und B heißen gleich, und man schreibt $A = B$, wenn beide Mengen genau dieselben Elemente besitzen. Sonst gilt $A \neq B$.*

$\Rightarrow$ Mengenrelationen und -operationen

Definition 6 *Gilt für jedes Element $x \in A$ auch $x \in B$, so heißt A Teilmenge von B, geschrieben: $A \subseteq B$.*

Definition 7 *Die Durchschnittsmenge $A \cap B$, die Vereinigungsmenge $A \cup B$ und die Differenzmenge $A - B$ für zwei Mengen A und B werden folgendermaßen definiert:*
$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$,
$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$,
$A - B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.

$\Rightarrow$ leere Menge $\emptyset$, komplementäre Menge, disjunkte Mengen

$\Rightarrow$ Gesetze für Mengenoperationen, Kreuzprodukt $M \times N$

$\Rightarrow$ Potenzmenge 2^V, Menge der k-elementigen Teilmengen $\binom{V}{k}$

$\Rightarrow$ Mächtigkeit einer Menge

Achtung ! $A = B$ beweist man durch die beiden Beweise $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

1.3 Kombinatorik

Definition 8 *Die Fakultät $n!$ wird für natürliche Zahlen n folgendermaßen definiert:*

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 & \text{für } n > 0, \\ 1 & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Anordnungen, Permutationen

Satz 1 *Die Anzahl der Permutationen von n Elementen ist $p_n = n!$*

Definition 9 *Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ wird für natürliche Zahlen n und k mit $0 \leq k \leq n$ folgendermaßen definiert:*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} & \text{für } 0 < k < n, \\ 1 & \text{für } k = 0 \text{ oder } k = n. \end{cases}$$

Satz 2 *Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ erfüllen für natürliche n und k mit $0 \leq k \leq n$ folgende Gesetze:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Achtung ! $\binom{n}{k} = 0$ für $k < 0$ oder $k > n$.

$\Rightarrow$ Auswahlen und Anordnungen

$\Rightarrow$ Kombinationen, Variationen (mit und ohne Wiederholungen)

Achtung ! 'mit Wiederholungen' heißt: Wiederholungen sind möglich, nicht notwendig !

Satz 3 *Die Anzahl der Kombinationen, Variationen (mit und ohne Wiederholungen) von n Elementen zur k-ten Klasse ist:*

	ohne Wiederholungen	*mit Wiederholungen*
Kombinationen	$K_{n,k} = \binom{n}{k}$	$K^W_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$
Variationen	$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} =$ $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$	$V^W_{n,k} = n^k$

Achtung ! $V_{n,n} = p_n$.

Satz 4 (Binomischer Lehrsatz) *Für jede natürliche Zahl n und je zwei Elemente x und y eines Körpers (z.B. $\mathbb{R}$) gilt:*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i = (x+y)^n.$$

Folgerung 1 *Für jede natürliche Zahl n gilt:*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Folgerung 2 *Für jede natürliche Zahl n gilt:*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0.$$

$\Rightarrow$ Wege im Gitter, Pascalsche Dreieck

Satz 5 *Für alle natürliche Zahlen n, k und m mit $0 \leq k \leq n$ und $0 \leq m \leq n$ gilt:*

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n-m}{k-i}.$$

Satz 6 *Für alle natürliche Zahlen n, k und m mit $0 \leq k \leq n$ und $0 \leq m \leq n-k$ gilt:*

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m+i}{i} \binom{n-m-i-1}{k-i}.$$

1.4 Relationen

Definition 10 *Eine binäre Relation R auf $A \times B$ ist eine Teilmenge von $A \times B$.*

$\Rightarrow$ Schreibweisen, z.B.: $xRy, a \leq b, m = n, w > z, p|q$

$\Rightarrow$ $x \not R x$

Eigenschaften von Relationen auf $A \times A$	
Eigenschaft	Definition
reflexiv	xRx für jedes $x \in A$
irreflexiv	$x \not R x$ für jedes $x \in A$
symmetrisch	$xRy \to yRx$ für alle $x, y \in A$
antisymmetrisch	$x \neq y, xRy \to y \not R x$ für alle $x, y \in A$
transitiv	$xRy, yRz \to xRz$ für alle $x, y, z \in A$

Wichtige Relationen auf $A \times A$	
Typ der Relation	Definition
Äquivalenzrelation	reflexiv, symmetrisch, transitiv
Halbordnung	reflexiv, antisymmetrisch, transitiv
Ordnung (lin. Ordnung)	Halbordnung und xRy oder yRx für alle $x, y \in A$

Satz 7 *Jede Äquivalenzrelation auf $A \times A$ definiert auf A eine Klasseneinteilung (Äquivalenzklassen).*

1.5 Zahlenbereiche

⇒ natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$

⇒ ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{x : -x \in \mathbb{N}^+\}$,

⇒ $\mathbb{Z}^+$

⇒ rationale: Zahlen $\mathbb{Q} = \{x : \exists a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, x = \frac{a}{b}\}$

Achtung ! Äquivalenzrelation

⇒ Dezimalbrüche, endliche, unendliche, periodische

⇒ reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{\text{alle Dezimalbrüche}\} =$
$= \mathbb{Q} \cup \{\text{nichtperiodische Dezimalbrüche}\}$

⇒ komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ etwas später

1.6 Zahlentheorie

Definition 11 *Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir sagen, a teilt b (oder 'a ist Teiler von b' oder 'b ist teilbar durch a'), falls es eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = a \cdot c$.*

Definition 12 *Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ heißt Primzahl, falls sie nur 1 und sich selbst als Teiler aus $\mathbb{N}$ hat.*

Regeln:
1. Falls $a|b$ und $c \in \mathbb{Z}$, so gilt $a|bc$.
2. Falls $a|b$ und $b|c$, so gilt $a|c$.
3. Falls $a|b$ und $a|c$, so gilt $a|b+c$ und $a|b-c$.

$\Rightarrow$ Halbordnung

Satz 8 (Euklid) *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Satz 9 (Fundamentalsatz der Arithmetik) *Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ hat eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmte Darstellung als Produkt von Primzahlen.*

$\Rightarrow$ größte gemeinsame Teiler (ggT) (a, b) der Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$

Algorithmus 1 (Euklidischer Algorithmus) *Es seien a und b zwei natürliche Zahlen mit $a > b > 0$. Setze $r_0 = a$ und $r_1 = b$ und bilde r_i für $i = 2, 3, \ldots$ gemäß*

$$r_{i-1} = q_i \cdot r_i + r_{i+1} \text{ mit } r_i > r_{i+1} \geq 0$$

bis erstmalig für einen Rest $r_{i+1} = 0$ gilt.

Satz 10 *Der letzte von O verschiedene Rest im Euklidischen Algorithmus ist der größte gemeinsame Teiler (a,b) zweier natürlicher Zahlen a und b.*

Folgerung 3 *Der größte gemeinsame Teiler (a,b) zweier Zahlen a und b lässt sich als Linearkombination von a und b darstellen, d.h. es gibt zwei ganze Zahlen m und n mit $(a, b) = ma + nb$.*

Folgerung 4 *Die natürliche Zahl 1 lässt sich genau dann als Linearkombination von a und b darstellen, wenn $(a, b) = 1$.*

Definition 13 *Gegeben seien die drei ganzen Zahlen a, b und m mit $m > 0$. Wir sagen 'a ist kongruent zu b modulo m', falls die Differenz a-b durch m teilbar ist.*

Lemma 1 $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ *und* $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ *gilt:*
1. $a \equiv a \bmod m$,
2. $a \equiv b \bmod m \Longleftrightarrow b \equiv a \bmod m$,
3. $a \equiv b \bmod m, b \equiv c \bmod m \Longrightarrow a \equiv c \bmod m$.

$\Rightarrow$ Äquivalenzrelation

Lemma 2 $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *und* $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ *gilt:*
1. Aus $a \equiv b \bmod m$ *und* $c \equiv d \bmod m$ *folgt* $a + c \equiv b + d \bmod m$ *und* $a - c \equiv b - d \bmod m$.
2. Aus $a \equiv b \bmod m$ *und* $c \equiv d \bmod m$ *folgt* $a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$.
3. Aus $a \equiv b \bmod m$ *folgt* $a \equiv b \bmod d$ *für jeden Teiler d von m.*
4. Aus $a \equiv b \bmod m$ *und* $a \equiv b \bmod n$ *mit* $(m, n) = 1$ *folgt* $a \equiv b \bmod m \cdot n$.

$\Rightarrow$ In den Restklassen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kann man 'normal' addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Achtung ! Dividieren !

Satz 11 *Die Elemente von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, die ein multiplikatives Inverses haben, sind genau die Zahlen, die relativ prim zu m sind, d.h. die Zahlen a, für die es eine Zahl b mit* $a \cdot b \equiv 1 \bmod m$ *gibt, sind genau die Zahlen mit* $(a, m) = 1$.

Folgerung 5 *Ist m eine Primzahl, so hat jedes Element* $a\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} - \{0\}$ *ein multiplikatives Inverses, d.h. für jede solche Zahl a gibt es eine Zahl b mit* $a \cdot b \equiv 1 \bmod m$.

Satz 12 (kleiner Satz von Fermat) *Ist p eine Primzahl, so gilt für jede ganze Zahl a :*

$$a^p \equiv a \bmod p.$$

Falls a nicht durch p teilbar ist, so gilt:

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p.$$

1.7 Abbildungen, Funktionen

Definition 14 *A und B seien Mengen. Eine Funktion von A nach B, $f : A \to B$, ist eine Relation mit der Eigenschaft: Zu jedem $x \in A$ steht ein eindeutig bestimmtes $y \in B$ in Relation.*

$\Rightarrow$ Notation: $y = f(x)$

$\Rightarrow$ Definitionsbereich, Bildbereich, Kompositum

Eigenschaften von Funktionen $f : A \to B$		
Eigenschaft		Definition
surjektiv	auf	$f(A) = B$
injektiv	eineindeutig	$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ für alle $x, x' \in A$
bijektiv	eineindeutig und auf	surjektiv und injektiv

$\Rightarrow$ inverse Funktion f^{-1} (Umkehrfunktion)

2 Algebraische Strukturen

2.1 Operationen

Definition 15 *Eine (binäre) Operation (Verknüpfung) $\circ$ auf einer Menge M ist eine Funktion $M \times M \to M$. Das Element in M, das (x, y) zugeordnet wird, heißt $x \circ y$.*

$\Rightarrow$ Operationstafel (Verknüpfungstafel)

$\Rightarrow$ Beispiele

Eine Operation $\circ$	
ist *assoziativ*,	wenn $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ für alle $x, y, z \in M$.
ist *kommutativ*,	wenn $x \circ y = y \circ x$ für alle $x, y \in M$.
ist *distributiv* über der Oper. $*$,	wenn $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ für alle $x, y, z \in M$.
hat ein *neutrales* Element e,	wenn $x \circ e = e \circ x = x$ für alle $x \in M$.

Das Element $x \in M$ hat ein *Inverses* x^{-1}, wenn $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

2.2 Gruppen

Definition 16 *Eine Gruppe $(M, \circ)$ ist eine Menge M mit einer Operation $\circ$ auf M mit folgenden Eigenschaften:*
1. assoziativ,
2. es existiert ein neutrales Element e,
3. jedes Element $x \in M$ hat ein eindeutiges Inverses x^{-1}.
4. Falls $(M, \circ)$ kommutativ ist, heißt $(M, \circ)$ abelsche Gruppe (oder kommutative Gruppe).

$\Rightarrow$ Beispiele

$\Rightarrow$ Addition: Nullelement, additives Inverses $-x$

$\Rightarrow$ Multiplikation: Einselement, multiplikatives Inverses x^{-1}

2.3 Körper

Definition 17 *Ein Körper $(M, \circ, *)$ ist eine Menge M mit zwei Operation $\circ$ und $*$ auf M mit folgenden Eigenschaften:*
1. $(M, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. $(M - \{0\}, *)$ ist eine abelsche Gruppe.
3. Es gilt das Distributivgesetz.

$\Rightarrow$ oft: $\circ$ - $+$ - Addition

$\Rightarrow$ oft: $*$ - $\cdot$ - Multiplikation

$\Rightarrow$ 0 - Nullelement = neutrales Element bzgl. der Addition

$\Rightarrow$ 1 - Einselement = neutrales Element bzgl. der Multiplikation

$\Rightarrow$ Beispiele

Achtung ! Bezeichnung $\mathbb{F}_n$ für Körper mit n Elementen.

$\Rightarrow$ Beispiele für endliche Körper:
$\mathbb{F}_p = (\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, falls p eine Primzahl ist.
$\mathbb{F}_4 = (M = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}, +, \cdot)$ mit

$+$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$
1	1	0	$\alpha+1$	α
α	α	$\alpha+1$	0	1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	α	1	0

$\cdot$	1	α	$\alpha+1$
1	1	α	$\alpha+1$
α	α	$\alpha+1$	1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	1	α

$\Rightarrow$ Isomorphie

Achtung ! $\mathbb{F}_n$ existiert genau für Primzahlpotenzen n und ist dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

3 Differenzengleichungen

⇒ Beispiele (arithmetische Folge, geometrische Folge, Fibonacci-Folge)

Definition 18 *Eine Differenzengleichung der Ordnung m ist eine rekursive Beziehung*

$$y_{n+m} = F(y_{n+m-1}, y_{n+m-2}, \dots, y_{n+1}, y_n),$$

$n = 0, 1, 2, \dots,$ *wobei F eine Funktion in m Variablen ist.*

⇒ Beispiel einer nicht-linearen Differenzengleichung

⇒ homogen, inhomogen

Definition 19 *Eine lineare Differenzengleichung der Ordnung m ist eine rekursive Beziehung*

$$y_{n+m} + a_{n+m-1}y_{n+m-1} + a_{n+m-2}y_{n+m-2} + \dots + a_{n+1}y_{n+1} + a_n y_n = c_n,$$

$n = 0, 1, 2, \dots,$ *mit $a_i \in K$, wobei K ein beliebiger Körper ist. Gesucht sind alle Folgen $\{y_i\} \in K$, die die Differenzengleichung lösen.*

⇒ Beispiel einer linearen Differenzengleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten

Achtung ! Lineare Differenzengleichungen sind immer lösbar; $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ sind frei wählbar.

⇒ $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ heißen Anfangswerte

⇒ Es bezeichne $\mathbf{y}$ abkürzend die Folge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

⇒ Abkürzende Schreibweise für die Differenzengleichung:

$$L(\mathbf{y}) = c_n,$$

$L(\mathbf{y})$ bezeichnet die linke Seite der Gleichung.

Satz 13 (Struktursatz für lineare Differenzengleichungen) *Mit der Kurzschreibweise gilt:*
a) Der Operator L ist linear:

$$L(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = L(\mathbf{y}) + L(\mathbf{z}),$$
$$L(\alpha \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot L(\mathbf{y}) \quad \forall \alpha \in K.$$

b) Sei $M = \{\mathbf{y} : L(\mathbf{y}) = 0\}$, *d.h. die Menge der Lösungen der homogenen Differenzengleichung:*

$$x, y \in M \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M \quad \forall \alpha, \beta \in K.$$

c) Ist $\overline{y}$ *eine (sogenannte spezielle) Lösung der inhomogene Gleichung, so erhält man alle Lösungen der inhomogenen Gleichung durch Addition der aller Lösungen der homogenen Gleichung zu* $\overline{y}$.

Definition 20 *Eine lineare Differenzengleichung der Ordnung* m *mit konstanten Koeffizienten ist eine rekursive Beziehung*

$$y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + a_{m-2}y_{n+m-2} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = c_n,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, *mit* $a_i \in K$, *wobei* K *ein beliebiger Körper ist. Gesucht sind alle Folgen* $\{y_i\} \in K$, *die die Differenzengleichung lösen.*

Satz 14 (Lösung der homogenen linearen Differenzengl.) *Die Differenzengleichung*

$$y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + a_{m-2}y_{n+m-2} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, *wird durch den Ansatz* $y_n = \lambda^n$ *mit* $\lambda \in K$ *gelöst.* λ *erfüllt die charakteristische Gleichung:*

$$\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + a_{m-2}\lambda^{m-2} + \ldots + \lambda y_1 + a_0 = 0.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *seien die Lösungen. Dann ist die (allgemeine) Lösung der homogenen Differenzengleichung:*

$$y_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \ldots + \alpha_m \lambda_m^n$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$.

$\Rightarrow$ Lösung der charakteristischen Gleichung (falls nicht alle Lösungen in K liegen oder die Lösungen nicht paarweise verschieden sind)

$\Rightarrow$ Methoden zum Bestimmen einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung:
a) Raten, Knobel
b) sukzessives Berechnen
c) geeignete Ansätze (Polynom, trigonometrischer Ausdruck)
d) Variation der Konstanten
e) Faltungssummen (hier nicht).

4 Komplexe Zahlen

4.1 Definition, Gauß'sche Zahlenebene

⇒ imaginäre Einheit i: $i^2 = -1$

⇒ $Re(z)$, $Im(z)$, Konjugiertes $\overline{z}$

⇒ Gaußsche Zahlenebene, Betrag $|z|$, Argument $arg(z)$

⇒ Rechenregeln

Satz 15 *Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bildet mit der 'üblichen' Addition und Multiplikation einen Körper.*

4.2 Polarkoordinaten-Darstellung

⇒ $z = x + iy = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi}$

⇒ Rechenregeln in der Polarkoordinaten-Darstellung

Satz 16 (De-Moivre-Formel)

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = cosn\varphi + isinn\varphi$$

4.3 Fundamentalsatz der Algebra

Satz 17 (Fundamentalsatz der Algebra) *Die Gleichung*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

vom Grad n hat in $\mathbb{C}$ genau n Wurzeln (Vielfachheiten mitgezählt). Sind $z_1, z_2, \ldots z_n$ die Wurzeln, dann gilt:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Satz 18 *Die Gleichung*

$$z^n = a = r(cos\varphi + isin\varphi)$$

hat genau die Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{r}(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

5 Lineare Algebra

5.1 Matrizen

Definition 21 *Eine Matrix ist ein rechteckiges Schema von Elementen (Zahlen, Elemente eines Körpers, auch Funktionswerte, etc.)*

$\Rightarrow$ Format $m \times n$, Zeilen, Spalte, $a_{i,j}$

$\Rightarrow$ $m = n$ - quadratische Matrizen

$\Rightarrow$ Zwei Matrizen sind gleich, $A = B$, wenn sie das gleiche Format haben und $a_{i,j} = b_{i,j}$ für alle i, j gilt.

Definition 22 *Für zwei Matrizen $A = (a_{i,j})$ und $B = (b_{i,j})$ vom gleichen Format ist die Summe $C = (c_{i,j})$ definiert durch: $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.*

Satz 19 *Die Matrizen vom Format $m \times n$ bilden mit der Addition eine abelsche Gruppe.*

$\Rightarrow$ Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar λA.

Definition 23 *Für zwei verkettete Matrizen $A = (a_{i,j})_{m,n}$ und $B = (b_{i,j})_{n,k}$ wird das Produkt $C = (c_{i,j})_{m,k}$ definiert durch:*

$$c_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \cdot b_{l,j}.$$

Achtung ! Die Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ.

$\Rightarrow$ Die Matrix-Multiplikation ist assoziativ.

Satz 20 *Für α und β und $n \times k$ Matrizen B und C und eine $m \times n$ Matrix A gilt:*

$$A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC.$$

Folgerung 6 *Für quadratische Matrizen A, B und C:*

$$A(B + C) = AB + AC$$

und

$$(B + C)A = BA + CA.$$

$\Rightarrow$ Einheitsmatrix I

Satz 21 *Falls eine Matrix eine (multiplikative) Inverse hat, so ist diese eindeutig.*

$\Rightarrow$ multiplikatives Inverse

Satz 22 *Falls die Matrizen A und B (multiplikative) Inversen besitzen, so hat auch $C = AB$ eine Inverse und es gilt*

$$C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

.

$\Rightarrow$ transponierte Matrix A^T

Satz 23 *Falls die Matrizen A und B verkettet sind, so gilt*

$$(AB)^T = B^T A^T$$

.

Satz 24 *Falls A^{-1} existiert, so gilt*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

.

5.2 Determinanten

⇒ Vorzeichen (σ) einer Permutation

Definition 24 *Die Determinante einer quadratischen $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$ wird definiert durch*

$$detA = |A| = \sum_{\pi} \sigma(\pi) a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n},$$

wobei die Summation über alle $n!$ Permutationen $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ von $\{1, 2, \ldots, n\}$ erstreckt wird.

⇒ Beispiele, Sarrus'sche Regel für $n = 3$

Satz 25 *Enthält eine Matrix A eine Nullzeile (Nullspalte), so gilt*

$$|A| = 0.$$

Satz 26 *Der Wert einer Determinante ändert das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen (Spalten) ausgetauscht werden.*

Satz 27 *Enthält eine Matrix A zwei gleiche Zeilen (Spalten), so gilt*

$$|A| = 0.$$

Satz 28 *Die Matrix D entstehe aus der Matrix A durch Multiplikation jedes Elementes der i-ten Zeile (Spalte) mit k. Dann gilt*

$$|D| = k|A|.$$

Satz 29 *Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile (Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte) addiert wird.*

$\Rightarrow$ Untermatrix $A_{i,j}$

Satz 30 (Entwicklungssatz, bzgl. Zeile i) *Für jede $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ gilt:*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} |A_{i,j}|.$$

Satz 31 (Entwicklungssatz, bzgl. Spalte j) *Für jede $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ gilt:*

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} |A_{i,j}|.$$

Folgerung 7 *Die Determinante einer Dreiecksmatrix ($a_{i,j} = 0$ falls $i > j$) ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente.*

Satz 32 *Für jede $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{k,j} |A_{i,j}| = 0,$$

falls $i \neq k$.

Satz 33 *Für je zwei $n \times n$-Matrizen A und B gilt:*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Definition 25 *Für jede $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ wird die zu A adjungierte Matrix $adj(A)$ definiert durch:*

$$adj(A) = ((-1)^{i+j} |A_{j,i}|) =$$

$$= \begin{pmatrix} +|A_{1,1}| & -|A_{2,1}| & \cdots & (-1)^{n+1}|A_{n,1}| \\ -|A_{1,2}| & +|A_{2,2}| & \cdots & (-1)^{n+2}|A_{n,2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}|A_{1,n}| & (-1)^{2+n}|A_{2,n}| & \cdots & (-1)^{n+n}|A_{n,n}| \end{pmatrix}.$$

Satz 34 *Für jede $n \times n$-Matrix A gilt:*

$$adj(A) \cdot A = A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I.$$

Satz 35 *Eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ besitzt genau dann eine inverse Matrix A^{-1}, wenn $|A| \neq 0$. Dann gilt:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A).$$

Definition 26 *Der Determinantenrang einer Matrix A ist die größte Zahl r, so dass A eine r-reihige Untermatrix mit $|A| \neq 0$ enthält.*

$\Rightarrow$ reguläre Matrizen, singuläre Matrizen

Definition 27 *Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ heißen linear unabhängig, falls die Gleichung*

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

nur *die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$ hat.*

Lemma 3 *Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär, $|A| \neq 0$, wenn die Zeilen (Spalten) linear unabhängig sind.*

Definition 28 *Der Zeilenrang einer Matrix A ist die größte Zahl r, so dass A r linear unabhängige Zeilen(vektoren) enthält.*

Definition 29 *Der Spaltenrang einer Matrix A ist die größte Zahl r, so dass A r linear unabhängige Spalten(vektoren) enthält.*

Satz 36 *Für jede Matrix A stimmen Determinantenrang, Zeilenrang und Spaltenrang überein.*

5.3 Lineare Gleichungssysteme

⇒ allgemeine Form

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \ldots &= \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

⇒ homogenes lineares Gleichungssystem

⇒ inhomogenes lineares Gleichungssystem

Definition 30 *$L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b})$ bezeichne die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

Satz 37 *Ist $\mathbf{x}_0$ eine (beliebige) Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, so gilt*

$$L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}) = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}' : \mathbf{x}' \in L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0})\}.$$

(Die allgemeine Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems setzt sich aus einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems und der allgemeinen Lösung des zugehörigen linearen homogenen Gleichungssystems zusammen.)

⇒ Koeffizientenmatrix A

⇒ erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$

Satz 38 *Ist $rg(A) = rg(A|\mathbf{b})$, so ist das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar. Ist $rg(A) < rg(A|\mathbf{b})$, so ist das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nicht lösbar.*

Satz 39 *Ist A eine $m \times n$-Matrix mit $rg(A) = r$, so besteht $L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0})$ aus allen Linearkombinationen von $n-r$ linear unabhängigen Lösungen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{n-r}$, d.h..*

$$L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}) = \{\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + \ldots + \lambda_{n-r} \mathbf{y}_{n-r}\}.$$

5.4 Gauß-Algorithmus

Satz 40 *Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems* $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ändert sich nicht, wenn folgende Operationen ausgeführt werden:*
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\lambda \neq 0$*,*
- Addition des λ*-fachen der* i*-ten Gleichung zur* j*-ten Gleichung,* $i \neq j$*.*

$\Rightarrow$ Gauß-Schritte

Satz 41 *Die am Ende des Gauß-Algorithmus erhaltene Trapezgestalt des Gleichungssystems hat folgende Form:*

$$\begin{array}{rcl}
a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + a'_{1,3}x_3 + \ldots + a'_{1,r}x_r + \ldots + a'_{1,n}x_n & = & b'_1 \\
a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \ldots + a'_{2,r}x_r + \ldots + a'_{2,n}x_n & = & b'_2 \\
a'_{3,3}x_3 + \ldots + a'_{3,r}x_r + \ldots + a'_{3,n}x_n & = & b'_3 \\
\ldots & = & \\
a'_{r,r}x_r + \ldots + a'_{r,n}x_n & = & b'_r \\
0 & = & b'_{r+1} \\
0 & = & 0 \\
\ldots & = & \\
0 & = & 0,
\end{array}$$

wobei $a_{i,i} \neq 0$ *für* $i = 1, 2, \ldots, r$*. Eventuell werden Gleichungen ausgetauscht oder Variable umbezeichnet*

Satz 42 *Ist in der am Ende des Gauß-Algorithmus erhaltene Trapezgestalt des Gleichungssystems* $b'_{r+1} \neq 0$*, so hat das Gleichungssystem keine Lösung.*

Satz 43 *Ist in der am Ende des Gauß-Algorithmus erhaltene Trapezgestalt des Gleichungssystems* $b'_{r+1} = 0$*, so ist das Gleichungssystem lösbar. Man erhält* **alle** *Lösungen, in dem man* $x_i = t_i$ *für* $i = r+1, r+2, \ldots, n$ *setzt, wobei diese* t_i *beliebige Elemente des zu Grunde liegenden Körpers sind (z.B.* $\mathbb{R}$*) und die restlichen Variablen* x_i *mit* $i = 1, 2, \ldots, r$ *einfach ausrechnet.*

5.5 Cramersche Regel

Satz 44 *Es sei* $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ein lineares Gleichungssystem mit einer* $n \times n$*-Koeffizientenmatrix* A*, die regulär ist.* A_i*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, entstehe aus* A *durch Ersetzen der* i*-ten Spalte durch* $\mathbf{b}$. *Dann gilt für die eindeutig bestimme Lösung* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}.$$