

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	vii
Inhaltsübersicht	ix
0 Prolog: Zufall und Wahrscheinlichkeit	1
0.1 Beispiele für Zufallsexperimente	2
0.2 Mathematische Modelle für Zufallsexperimente	3
0.3 Beispiele für Ergebnisräume	4
0.4 Definition von Mengenalgebren	5
0.5 Bemerkungen über Mengenalgebren	5
0.6 Beispiele für Mengenalgebren	5
0.7 Bemerkung zur Definition des Gleichverteilungsansatzes	6
0.8 Folgerung aus der Gleichverteilungsdefinition	6
0.9 Bemerkungen zum frequentistischen Ansatz	7
0.10 Definition von Wahrscheinlichkeitsinhalten	9
0.11 Beispiele für Wahrscheinlichkeitsinhalte	9
0.12 Bemerkung über Halbgebren	11
0.13 Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsinhalten	11
Aufgaben	13
I Finite Modelle	17
1 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume und einfache Zufallsvariablen	17
A Endliche Wahrscheinlichkeitsräume	18
1.1 Definition endlicher Wahrscheinlichkeitsräume	18
1.2 Hilfssatz und Definition: Erzeugte Algebren	19
1.3 Beispiele für Erzeugendensysteme	19
1.4 Hilfssatz: Erzeugung endlicher Algebren	20
1.5 Definition der Isomorphie von Stichprobenräumen	20
1.6 Folgerung: Struktur endlicher Stichprobenräume	21
1.7 Satz: Endliche Wahrscheinlichkeitsräume und Einheitssimplices	21

1.8	Beispiele zu Satz 1.7	22
1.9	Beispiel: Urnenmodelle	22
1.10	Eindeutigkeitssatz für Wahrscheinlichkeitsinhalte	25
1.11	Hilfssatz über d-Systeme	26
B	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen	27
1.12	Definition bedingter Wahrscheinlichkeiten	27
1.13	Bemerkung zu bedingten Wahrscheinlichkeiten	27
1.14	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und Bayesformel	28
1.15	Beispiel: Qualitätskontrolle	29
1.16	Hilfssatz: Produktregel	29
1.17	Beispiel: Produktregel, Urnenmodell	29
1.18	Beispiel: Produktregel, Verbleibswahrscheinlich- keiten, Sterbetafeln	29
1.19	Definition: Stochastische Unabhängigkeit von (Mengen von) Ereignissen	32
1.20	Bemerkungen zur stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen	32
1.21	Beispiel: Individuelles Modell der Risikotheorie	32
1.22	Beispiele: Urnenmodelle und stochastische Unabhängigkeit	34
1.23	Satz: Vererbung stochastischer Unabhängigkeit nach oben	35
1.24	Folgerung zu Satz 1.23	35
C	Einfache Zufallsvariablen	36
1.25	Beispiele für Zufallsvariablen (heuristisch)	36
1.26	Definition: (Einfache) Zufallsvariablen	38
1.27	Beispiele: Fortsetzung der Beispiele 1.25	38
1.28	Bemerkung: Standarddarstellung einfacher Zufallsvariablen	39
1.29	Von einer Abbildung erzeugte Algebra	39
1.30	Beispiel zu Definition 1.29	40
1.31	Hilfssatz: Vertauschbarkeit von Urbildabbildung und Übergang zur erzeugten Algebra	40
1.32	Bemerkung: Was sagt die Struktur der erzeugten Algebra über die Abbildung?	41

1.33	Bemerkung: Funktionen einfacher Zufallsvariablen . . .	41
1.34	Beispiel: Ergänzung der Beispiele 1.25 (b)	42
D	Der Erwartungswert einfacher Zufallsvariablen . . .	42
1.35	Definition: Erwartungswert einfacher Zufallsvariablen .	43
1.36	Hilfssatz: Unabhängigkeit von der Standarddarstellung .	44
1.37	Satz: Eigenschaften des Erwartungswertes	45
1.38	Beispiel: Erwartungswerte bei Laplace-Wahrscheinlichkeitsräumen	45
1.39	Beispiel: Erwartungswert bei Binomialexperimenten .	46
1.40	Beispiel: Erwartete Wartezeit beim Ziehen ohne Zurücklegen	49
1.41	Beispiel: Erwartete ganzzahlig gestutzte zukünftige Verweildauer	51
1.42	Exkurs: Diskrete Zahlungsströme und ihre Bewertung .	52
1.43	Erwarteter Leistungsbarwert einer Leibrente	53
E	Varianz, Kovarianz und stochastische Unabhängigkeit einfacher Zufallsvariablen	54
1.44	Definition: Varianz einfacher Zufallsvariablen	54
1.45	Hinweise zur Interpretation der Varianz	55
1.46	Satz: Ungleichung von Tschebyschev-Markov	55
1.47	Hilfssatz: Eigenschaften der Varianz	56
1.48	Definition: Kovarianz einfacher Zufallsvariablen . . .	57
1.49	Bemerkungen zu Varianz und Kovarianz	57
1.50	Definition: Stochastische Unabhängigkeit und Unkorreliertheit einfacher Zufallsvariablen	58
1.51	Bemerkungen zu Definition 1.50	58
1.52	Satz: Stochastische Unabhängigkeit impliziert Unkorreliertheit	59
1.53	Bemerkung: Impliziert umgekehrt Unkorreliertheit stochastische Unabhängigkeit?	59
1.54	Beispiele: Urnenmodelle und stochastische Unabhängigkeit	60
1.55	Beispiel: Varianzen bei Laplace-Wahrscheinlichkeitsräumen	60
1.56	Beispiel: Varianz bei Binomialexperimenten	61

1.57	Beispiel: Varianz des arithmetischen Mittels beim Ziehen ohne Zurücklegen	62
1.58	Beispiel: Varianz der ganzzahlig gestutzten zukünftigen Verweildauer	63
1.59	Beispiel: Varianz des Barwertes einer Leibrente	64
F	Aufgaben	64
2	Grenzwertsätze für einfache Zufallsvariablen	75
A	Einführendes zu Gesetzen der großen Zahlen	75
2.1	Satz: Schwaches Gesetz der großen Zahlen	75
2.2	Bemerkungen zu Gesetzen der großen Zahlen	76
B	Poissonscher Grenzwertsatz und Poisson- approximation	77
2.3	Satz: Poissonscher Grenzwertsatz	78
2.4	Poissonsche Approximation	79
2.5	Erinnerung: Betafunktion und Gammafunktion	81
2.6	Satz: Kumulierte Binomialwahrscheinlichkeiten	83
C	Der Zentrale Grenzwertsatz	85
2.7	Vorüberlegungen zum Satz von de Moivre und Laplace	85
2.8	Lokaler Zentraler Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace	86
2.9	Zur Interpretation des Zentralen Grenzwertsatzes: Histogramme und Gaußsche Glockenkurve	88
2.10	Satz: Zentraler Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace	91
2.11	Bemerkungen zum Zentralen Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace	93
D	Arcussinus-Gesetze für symmetrische Irrfahrten	94
2.12	Beispiel: Cox-Ross-Rubinstein-Finanzmarktmodell . . .	95
2.13	Stochastische Modellierung symmetrischer Irrfahrten	96
2.14	Hilfssatz: Andrésches Spiegelungsprinzip	97
2.15	Bemerkung zu Wahrscheinlichkeiten einer Rückkehr zum Nullpunkt	98
2.16	Satz über Wahrscheinlichkeiten keiner Rückkehr zum Nullpunkt	98

2.17	Folgerung: Arcussinus-Gesetz für die letzte Rückkehr zum Nullpunkt	100
2.18	Folgerung zum Arcussinus-Gesetz	100
2.19	Zur Interpretation des Arcussinus-Gesetzes	103
2.20	Satz: Arcussinus-Gesetz für Verweilzeiten	104
2.19	Zur Interpretation des Arcussinus-Gesetzes (Fortsetzung)	105
E	Aufgaben	105
3	Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit endlichem Träger	111
A	Einführung und Beispiele	111
3.1	Definition: Punktmaß/Diracmaß	111
3.2	Definition: Wahrscheinlichkeitsverteilung mit endlichem Träger	112
3.3	Beispiele für Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit endlichem Träger	112
3.4	Beispiel: Multinomialverteilungen in der Rückversicherung	114
B	Verteilungen einfacher Zufallsvariablen und Zufallsvektoren	116
3.5	Satz und Definition: Verteilung einer einfachen Zufallsvariablen	116
3.6	Hilfssatz: Berechnung von Verteilungen einfacher Zufallsvariablen	117
3.7	Beispiele für Verteilungen einfacher Zufallsvariablen .	117
3.8	Satz: Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit endlichem Träger und einfache Zufallsvariablen	119
3.9	Definition: Integrale bezüglich diskreter Wahrschein- lichkeitsverteilungen mit endlichem Träger	119
3.10	Eigenschaften des Q -Integrals	119
3.11	Satz: Transformationssatz für Integrale	120
3.12	Definition: Einfache Zufallsvektoren	121
3.13	Satz und Definition: Verteilung eines einfachen Zufallsvektors	122
3.14	Beispiel: Personengesamtheiten mit mehreren Ausscheideursachen	122
3.15	Beispiel: Gemeinsame Verteilung und Randverteilungen	124
3.16	Definition: Eindimensionale Randverteilungen	125

3.17	Bemerkung: Warum “Randverteilungen”?	125
3.18	Satz: Randverteilungen sind Verteilungen der Koordinatenprojektionen	126
3.19	Beispiel: Multinomialexperimente	126
3.20	Gegenbeispiel: Randverteilungen legen die gemeinsame Verteilung nicht fest	127
C	Produkte endlicher Wahrscheinlichkeitsräume	128
3.21	Definition: Produkt zweier Wahrscheinlichkeits- verteilungen mit endlichem Träger	128
3.22	Satz: Gemeinsame Verteilung stochastisch unab- hängiger einfacher Zufallsvariablen	129
3.23	Modellbildungsproblem: Stochastisch unabhängige ein- fache Zufallsvariablen mit gegebenen Verteilungen	130
3.24	Definition: Produkt zweier endlicher Algebren	130
3.25	Produkt zweier Wahrscheinlichkeitsinhalte	130
3.26	Definition: Produkt zweier endlicher Wahrschein- lichkeitsräume	131
3.27	Satz: Produkt endlich vieler endlicher Wahrschein- lichkeitsräume	133
3.28	Existenz stochastisch unabhängiger einfacher Zufallsvariablen mit gegebenen Verteilungen	134
D	Aufgaben	135
II	Allgemeine Modelle	141
4	Wahrscheinlichkeitsräume	141
4.1	Beispiele: “Finit” ist nicht genug	142
A	Mengen-σ-Algebren, Dynkin-Systeme und monotone Klassen	142
4.2	Aussagen über unendlich viele Ereignisse	142
4.3	Definition von Mengen- σ -Algebren	144
4.4	Bemerkungen und Beispiele zu Mengen- σ -Algebren	144
4.5	Satz: Erzeugung von σ -Algebren	144
4.6	Definition: Borel- σ -Algebra eines metrischen Raumes	145
4.7	Bemerkungen über Borel- σ -Algebren	146
4.8	Beispiele für Borel- σ -Algebren	146
4.9	Hilfssatz: Wahlfreiheit beim Erzeugendensystem	147

4.10	Definition von Dynkin-Systemen	147
4.11	Beispiele für Dynkin-Systeme	147
4.12	Hilfssatz über Dynkin-Systeme	147
4.13	Definition und Hilfssatz: Monotone Klassen	148
B	Wahrscheinlichkeitsmaße	149
4.14	Motivation: Stetigkeitshoffnungen	149
4.15	Konvergente Mengensequenzen	150
4.16	Definition: Stetigkeit, Wahrscheinlichkeitsmaße und Wahrscheinlichkeitsräume	150
4.17	Eigenschaften stetiger Wahrscheinlichkeitsinhalte	151
4.18	Definition der σ -Additivität	151
4.19	Satz: Zusammenhang von σ -Additivität und Stetigkeit	151
4.20	Beispiele: Wahrscheinlichkeitsmaße und Wahrscheinlichkeitsräume	152
4.21	Definition diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen	152
4.22	Bemerkung über diskrete Wahrscheinlichkeits- verteilungen	153
4.23	Beispiel: Kollektives Modell der Risikotheorie	153
4.24	Beispiele für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Poissonverteilungen, logarithmische Verteilungen und geometrische Verteilungen	154
4.25	Erinnerung: Das Lebesgue-Integral	156
4.26	Definition Lebesgue-stetiger Wahrscheinlich- keitsverteilungen	161
4.27	Bemerkungen über Lebesgue-stetige Wahrscheinlich- keitsverteilungen	161
4.28	Beispiele Lebesgue-stetiger Wahrscheinlichkeitsver- teilungen: Gleichverteilungen, Normalverteilungen, Arcussinus-Verteilungen und Gamma-Verteilungen	162
C	Verteilungsfunktionen	167
4.29	Satz und Definition: Verteilungsfunktionen	167
4.30	Eindeutigkeitssatz für Wahrscheinlichkeitsmaße	169
4.31	Verteilungsfunktionen diskreter Wahrscheinlich- keitsverteilungen	169
4.32	Beispiele für Verteilungsfunktionen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen	170

4.33	Verteilungsfunktionen Lebesgue-stetiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen	170
4.34	Beispiele für Verteilungsfunktionen Lebesgue-stetiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen	171
4.35	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels Verteilungsfunktionen	173
4.36	Hilfssatz: Eigenschaften reeller Verteilungsfunktionen .	174
4.37	Bemerkung zu multivariaten Verteilungsfunktionen . .	175
4.38	Zerlegungssatz für reelle Verteilungsfunktionen . . .	176
D	Rund um das Lemma von Borel-Cantelli	177
4.39	Hilfssatz: Wahrscheinlichkeit eines mengentheoretischen $\lim \sup$	177
4.40	Lemma von Borel-Cantelli	177
4.41	Folgerung aus dem Lemma von Borel-Cantelli	178
4.42	Beispiel zum Lemma von Borel-Cantelli	179
4.43	Folgerung: Satz vom endlos tippenden Affen	179
4.44	Definition terminaler σ -Algebren	180
4.45	Satz: Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov	180
E	Aufgaben	181
5	Zufallsvariablen, Zufallsvektoren und Verteilungen von Zufallsgrößen	188
A	Numerische Zufallsvariablen mit abzählbarem Bild	188
5.1	Numerische Zufallsvariablen	189
5.2	Beispiel: Wartezeiten bei Bernoullifolgen	189
5.3	Beispiele für Schadenzahlverteilungen im kollektiven Modell der Risikotheorie: Panjer-Klasse	192
B	Signalprozesse, Zählprozesse und Punktprozesse	194
5.4	Definition stochastischer Prozesse	194
5.5	Beispiel: Bernoulliprozeß	195
5.6	Signalprozesse, Zählprozesse und Punktprozesse . . .	195
5.7	Beispiel: Homogener Poissonscher Zählprozeß	197
5.8	Modellbildungsproblem	198
5.9	Satz: Die Verteilungen der Zuwächse homogener Poissonprozesse	198

C	Numerische Zufallsvariablen und Zufallsvektoren	200
5.10	Hilfssatz: Charakterisierung numerischer Zufallsvariablen	200
5.11	Folgerung: Zählvariablen und Wartezeiten sind Zufallsvariablen	201
5.12	Beispiel: Punktprozeß eines homogenen Poissonprozesses	201
5.13	Folgerungen zu Hilfssatz 5.10	201
5.14	Definition meßbarer Abbildungen zwischen beliebigen Meßräumen	202
5.15	Bemerkungen zu meßbaren Abbildungen	202
5.16	Definition: Zufallsvektoren	203
5.17	Beispiel: Personengesamtheiten mit mehreren Ausscheideursachen	204
5.18	Beispiel: Gruppen von Personen aus mehreren Personengesamtheiten	204
5.19	Beispiel: Buffonsches Nadelexperiment	204
5.20	Satz: Charakterisierung von Zufallsvektoren	205
5.21	Stetige Funktionen von Zufallsvektoren	205
D	Verteilungen meßbarer Abbildungen	206
5.22	Satz und Definition: Verteilung einer Zufallsgröße	206
5.23	Satz: Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Zufallsvariable mit abzählbarem Bild	207
5.24	Wahrscheinlichkeitsmaße und Verteilungen meßbarer Abbildungen	207
5.25	Beispiel: Eindimensionale Normalverteilungen	208
5.26	Beispiele für Schadenhöhenverteilungen im kollektiven Modell der Risikotheorie: Gammaverteilungen, Weibullverteilungen, Paretoverteilungen und Lognormalverteilungen	209
E	Der Intensitätskalkül (Ausfallraten)	217
5.27	Intensitätskalkül für Lebensdauervertelungen	217
5.28	Hilfssatz: Modellbildung mittels Sterbeintensitäten	220
5.29	Beispiele: Gompertzverteilungen und Gompertz-Makeham-Verteilungen	220
5.30	Sterbeintensitäten von Weibullverteilungen	224

5.31	Beispiel: Personengesamtheiten mit mehreren Ausscheideursachen (Fortsetzung von Beispiel 5.17)	224
F	Zwei Beispiele aus der geometrischen Wahrscheinlichkeitstheorie	225
5.32	Beispiel: Buffonsches Nadelexperiment (Fortsetzung)	225
5.33	Beispiel: Cauchyverteilungen	226
G	Quantilfunktionen	228
5.34	Modellbildungsproblem für univariate Verteilungsfunktionen	228
5.35	Definition von Quantilfunktionen	228
5.36	Bemerkungen über Quantilfunktionen und Quantile	228
5.37	Satz: Existenz von Zufallsvariablen mit gegebenen Verteilungsfunktionen	231
5.38	Satz: Transformation auf Gleichverteilung	232
5.39	Beispiel: Median von Lebensdauervertelungen	232
5.40	Beispiel: Value at Risk	233
5.41	Beispiel: Perzentilprinzip der Prämienkalkulation	234
H	Transformation von Zufallsgrößen und ihren Verteilungen	235
5.42	Hilfssatz: Iterierte Verteilungen	235
5.43	Transformationen univariater Verteilungsfunktionen	235
5.44	Transformationen univariater Lebesgue-Dichten	237
5.45	Transformationssatz für Dichten	238
5.46	Folgerung: Affin-lineare Transformationen multivariater Lebesgue-Wahrscheinlichkeitsdichten	239
5.47	Folgerung: Lebesgue-Dichten von Quotienten von Zufallsvariablen	239
5.48	Folgerung: Lebesgue-Dichten von Summen von Zufallsvektoren	241
5.49	Bemerkung: Von der gemeinsamen Verteilung zu Randverteilungen	241
I	Multivariate Normalverteilungen	242
5.50	Definition: Mehrdimensionale Standardnormalverteilung	242
5.51	Mehrdimensionale Normalverteilungen	243

5.52	Satz: Linear transformierte Gaußvektoren sind Gaußvektoren	244
5.53	Folgerung: Orthogonal transformierte Gaußsche Einheitsvektoren	247
5.54	Folgerung: Lineare Funktionale von Gaußvektoren sind Gaußisch	247
J	Aufgaben	248
6	Konvergenz von Zufallsgrößen und ihren Verteilungen	258
A	Stochastische Konvergenz und fast sichere Kon- vergenz	258
6.1	Definition: Stochastische Konvergenz von Zufalls- variablen	258
6.2	Bemerkungen zur stochastischen Konvergenz von Zufallsvariablen	258
6.3	Beispiel: Stochastische Konvergenz trotz Divergenz in allen Punkten	259
6.4	Stochastische Konvergenz von Zufallsvektoren	261
6.5	Fast sicher bestehende Eigenschaften, fast sichere Konvergenz	261
6.6	Eindeutigkeit des fast sicheren Limes	262
6.7	Satz: Charakterisierungen fast sicherer Konvergenz	262
6.8	Satz: Cauchy Kriterium für fast sichere Konvergenz	263
6.9	Folgerungen aus den Sätzen 6.7 und 6.8	263
6.10	Satz: Fast sichere Konvergenz — Stochastische Konvergenz	264
6.11	Folgerung: Cauchy Kriterium für stochastische Konvergenz	265
6.12	Folgerung: Konvergenzerhalt unter stetigen Trans- formationen	266
6.13	Folgerung: Limesrechenregeln für stochastische und fast sichere Konvergenz	266
6.14	Definitionen: Stetigkeitseigenschaften stochastischer Prozesse	267
6.15	Beispiel: Stetigkeitseigenschaften von Pfaden von Poissonprozessen	267

B	Verteilungskonvergenz	268
6.16	Diskussion: Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen	269
6.17	Definition: Verteilungskonvergenz von Zufallsvariablen	271
6.18	Eindeutigkeit des Limes bei Verteilungskonvergenz	271
6.19	Satz: Stochastische Konvergenz — Verteilungskonvergenz	272
6.20	Beispiel: Stochastische Konvergenz — Verteilungskonvergenz	272
6.21	Metrisierung der Verteilungskonvergenz	273
6.22	Satz: Verteilungskonvergenz und Quantilfunktionen	274
6.23	Beispiel: Zur Konvergenz der Perzentilprämie	275
6.24	Satz: Fast sichere Konvergenz — Verteilungskonvergenz	277
6.25	Falschaussage zur Verteilungskonvergenz von Summen verteilungskonvergenter Zufallsvariablen	277
C	Der Variationsabstand von Wahrscheinlichkeitsmaßen	278
6.26	Definition: Variationsabstand von Wahrscheinlichkeitsmaßen	278
6.27	Bemerkungen zum Variationsabstand	278
6.28	Hilfssatz zur Berechnung des Variationsabstandes	279
6.29	Beispiel: Poissonsche Approximation	280
D	Aufgaben	280
7	Erwartungswerte, höhere Momente und L_p-Räume	286
A	Aufbau und elementare Eigenschaften des Erwartungswertes	286
7.1	Algebraische Induktion	286
7.2	Hilfssatz: Monotone Approximation durch einfache Zufallsvariablen	288
7.3	Hilfssatz: Nullstetigkeit des Erwartungswertes einfacher Zufallsvariablen	289
7.4	Definition: Erwartungswert nichtnegativer Zufallsvariablen	290
7.5	Bemerkungen zur Erwartungswertdefinition	290

7.6	Satz: Linearitäts- und Monotonieeigenschaften des Erwartungswertes	290
7.7	Folgerungen aus Satz 7.6	291
7.8	Satz von der monotonen Konvergenz (Satz von Beppo Levi)	291
7.9	Folgerungen aus dem Satz von der monotonen Konvergenz	292
7.10	Beispiele: Berechnung von Erwartungswerten	293
7.11	Beispiel: Erwartete zukünftige Verweildauer	296
7.12	Definition: Erwartungswert bei beliebigem Vorzeichen	297
7.13	Bemerkungen zur Erwartungswertdefinition	297
7.14	Satz: Linearitäts- und Monotonieeigenschaften des Erwartungswertes	298
7.15	Folgerungen aus Satz 7.14 und Folgerung 7.7	298
B	Erwartungswertberechnung: Sätze und Beispiele	298
7.16	Satz: Transformationssatz für Integrale	299
7.17	Folgerung: Erwartungswert = Symmetriezentrum	299
7.18	Beispiele für Erwartungswerte symmetrischer Verteilungen	300
7.19	Folgerung: Erwartungswerte sind stets Lebesgue- Integrale	300
7.20	Folgerung: Erwartungswerte bei diskreten oder absolutstetigen Verteilungen	301
7.21	Berechnungsbeispiele für zweite Momente diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen	303
7.22	Beispiele: Erwartungswerte und höhere Momente von Zufallsvariablen mit Lebesgue-stetigen Verteilungen	304
7.23	Exkurs: Zahlungsströme und ihre Bewertungen	307
7.24	Beispiele: Erwartete Barwerte und höhere Momente von Barwerten natürlicher Versicherungsleistungen	310
7.25	Allgemeine Stationaritätsbedingung und unterjähriger Sterblichkeitsverlauf	312
C	Verteilungsmaßzahlen	313
7.26	Lagemaßzahlen	313
7.27	Beispiele zur Unimodalität und zu Modalwerten	315

7.28	Definition: Varianz, Standardabweichung und Variationskoeffizient integrierbarer Zufallsvariablen	316
7.29	Streuungsmaßzahlen	316
7.30	Ungleichung von Tschebyschev-Markov	317
7.31	Transformationsverhalten der Varianz und Standardisierung	318
7.32	Berechnungsbeispiele für Varianzen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen	319
7.33	Berechnungsbeispiele für Varianzen Lebesgue-stetiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen	320
7.34	Definition: Kovarianz quadratintegrierbarer Zufallsvariablen	321
7.35	Hilfssatz und Definition: Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten	322
7.36	Beispiel: Varianz der (ganzzahlig gestutzten) zukünftigen Verweildauer	323
7.37	Beispiel: Kovarianz, Korrelation und nichtlinearer Zusammenhang	324
7.38	Satz: Kovarianz gegenläufig monotoner Funktionen	324
7.39	Definition: Stochastische Ordnung	324
7.40	Hilfssatz: Charakterisierungen der stochastischen Ordnung	325
7.41	Folgerung: Negative Korrelation von Barwerten von Erlebensfalleistungen und Todesfalleistungen	327
7.42	Rechtsschiefe (linkssteile) und linksschiefe (rechtssteile) unimodale Wahrscheinlichkeitsverteilungen	328
7.43	Definition: Momentenkoeffizient der Schiefe	330
7.44	Beispiele: Die Schiefe einiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen	330
7.45	Definition: Kurtosis und Exzeß	331
7.46	Beispiel: Kurtosis von Gleichverteilungen	332
D	Konvergenzsätze für Erwartungswerte	333
7.47	Satz: Lemma von Fatou	333
7.48	Lemma von Fatou ohne Vorzeicheneinschränkung	334
7.49	Satz von der dominierten Konvergenz (Satz von Lebesgue)	334
7.50	Bemerkungen zum Satz von Lebesgue	334

7.51	Beispiel: Verdoppelungsstrategie (Petersburg-Spiel) . . .	335
7.52	Folgerung: Charakterisierung von Verteilungskonvergenz durch Konvergenz von Erwartungswerten	338
E Integralungleichungen, L_p-Räume und gleichgradige Integrierbarkeit		339
7.53	Bezeichnungen: Konjugierte Exponenten und p -Halbnormen	339
7.54	Satz: Integralungleichungen von Hölder und Minkowski	340
7.55	Folgerungen aus den Ungleichungen von Hölder und Minkowski	340
7.56	Bemerkungen zur N_p -Konvergenz	341
7.57	Satz: Ungleichung von Jensen	341
7.58	Bemerkungen über konvexe Funktionen	342
7.59	Einführung von L_p -Räumen	343
7.60	Vollständigkeitssatz von Riesz und Fischer	344
7.61	Konvergenz im Mittel impliziert stochastische Konvergenz	345
7.62	Definition: Gleichgradige Integrierbarkeit	346
7.63	Hilfssatz: Charakterisierung der gleichgradigen Integrierbarkeit	347
7.64	Verallgemeinerter Satz von der dominierten Konvergenz (Satz von Lebesgue)	347
7.65	Folgerung: Satz von Lebesgue für verteilungs- konvergente Folgen	349
7.66	Satz: Der stetige Dualraum von L_p	350
7.67	Konvergenzkonzepte für Zufallsvariablen und ihre Verteilungen	351
F Erwartungswertvektoren und Kovarianzmatrizen		352
7.68	Definition: Erwartungswertvektoren	352
7.69	Rechenregeln für Erwartungswertvektoren	352
7.70	Beispiele für Erwartungswertvektoren	353
7.71	Definition: Kovarianzmatrizen	353
7.72	Eigenschaften von und Rechenregeln für Kovarianzmatrizen	353
7.73	Beispiele für Kovarianzmatrizen	354
G Aufgaben		355

8	Stochastische Unabhängigkeit	370
A	Charakterisierung und erste Beispiele	370
8.1	Definition: Stochastische Unabhängigkeit beliebiger Zufallsgrößen	370
8.2	Satz: Vererbung stochastischer Unabhängigkeit nach oben	371
8.3	Folgerung zu Satz 8.2	371
8.4	Folgerung: Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvektoren	372
8.5	Zur Verifikation stochastischer Unabhängigkeit von Zufallsvektoren	372
8.6	Beispiele: Stochastische Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen	374
8.7	Charakterisierung: Stochastische Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen	377
8.8	Beispiele: Ordnungsstatistiken und Betaverteilungen	379
8.9	Beispiele: Ordnungsstatistiken und Rangstatistiken	381
8.10	Über den Begriff “Stochastische Unabhängigkeit”	382
B	Folgen unabhängiger Zufallsvariablen und Konstruktion von Poissonprozessen	383
8.11	Modellbildungsproblem: Folgen stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit gegebenen Verteilungen	383
8.12	Satz: Existenz von Folgen stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit gegebenen Verteilungen	383
8.13	Folgerung: Existenz homogener Poissonscher Zählprozesse	384
8.14	Definition: Stochastische Prozesse mit stationären Zuwächsen	388
8.15	Inhomogene Poissonsche Zählprozesse	388
C	Stochastische Unabhängigkeit in der versicherungsmathematischen Modellbildung	391
8.16	Beispiel: Statisches individuelles Modell und statisches kollektives Modell der Risikotheorie	391
8.17	Austauschbare Zufallsgrößen	394
8.18	Beispiel: Dynamisches kollektives Modell der Risikotheorie	395

8.19	Beispiel: Personengruppen, die beim ersten Tod erlöschen	396
8.20	Satz von Fubini für Verteilungen unabhängiger Zufallsvektoren	398
8.21	Beispiel: Personengruppen, die beim ersten Tod erlöschen (Fortsetzung von Beispiel 8.19)	400
8.22	Beispiel: Modellbildung mittels unabhängiger latenter Lebensdauern	401
D	Stochastische Unabhängigkeit, Unkorreliertheit und multivariate Normalverteilungen	404
8.23	Satz: Stochastische Unabhängigkeit impliziert Unkorreliertheit	404
8.24	Formel von Bienaymé-Tschebyshev	405
8.25	Folgerung: Gesamtschadensvarianzen	405
8.26	Quadratintegrierbare stochastische Prozesse	406
8.27	Satz: Unkorreliertheit und Unabhängigkeit bei Normalverteilungen	407
8.28	Folgerung: Stochastische Unabhängigkeit von Projek- tionen Gaußscher Einheitsvektoren auf orthogonale Teilräume	408
8.29	Folgerung: Satz von Student (Teil 1)	409
8.30	Multivariate Normalverteilung und Normalverteilung aller Komponenten	409
E	Aufgaben	411
9	Verteilungen von Summen unabhängiger Zufallsvariablen und Zufallsvektoren (Faltungen)	416
A	Die Faltung: Definition und Berechnung	416
9.1	Satz: Verteilung einer Summe unabhängiger Zufalls- vektoren	417
9.2	Definition der Faltung von Wahrscheinlichkeitsmaßen	417
9.3	Diskussion der Faltungsdefinition	418
9.4	Folgerung: Assoziativität und Kommutativität der Faltung	420
9.5	Beispiele für Faltungen	420
9.6	Satz: Schwache Stetigkeit der Faltungsoperation	422
9.7	Satz: Diskrete Faltungsformel	424

9.8	Beispiele: Faltungen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen	425
9.9	Satz: Faltungsformel bei Absolutstetigkeit	425
9.10	Beispiele: Faltungen absolutstetiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen	426
9.11	Beispiel: Inverse Normalverteilungen	427
9.12	Satz von Student (Teil 2)	428
B	Anwendungsbeispiele in Statistik und Versicherungsmathematik	429
9.13	Beispiel: Fortsetzung des Beispiels 5.25 zur Gaußschen Fehlertheorie	429
9.14	Satz von Student (Teil 3)	434
9.15	Satz: t -Dichten konvergieren gegen Standardnormalverteilungsdichte	434
9.16	Satz: Verteilungsmaßzahlen von t -Verteilungen	436
9.17	Beispiele: Gesamtschadenmodelle der Risikotheorie (Fortsetzung der Beispiele 8.16)	437
9.18	Beispiel: Pooling von Versicherungsbeständen	439
9.19	Satz: Unterjährige Sterblichkeitsinterpolation	439
9.20	Satz: Faltung einer diskreten mit einer Lebesgue-stetigen Verteilung	440
9.21	Satz: Faltung als Glättungsoperation	441
C	Faltungshalbgruppen und Prozesse mit unabhängigen, stationären Zuwächsen	442
9.22	Definition: Univariate Faltungshalbgruppen	443
9.23	Beispiele für Faltungshalbgruppen	443
9.24	Beispiel: Zuwächse von Poissonprozessen	443
9.25	Satz: Faltungshalbgruppen und Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen	443
9.26	Definition: Eindimensionale Brownsche Bewegung	444
9.27	Beispiel: Black-Scholes-Finanzmarktmodell	447
9.28	Definition: Lévyprozesse	448
D	Aufgaben	450
10	Gesetze der großen Zahlen	458
A	Schwaches Gesetz der großen Zahlen	458

10.1	Definition: Schwaches Gesetz der großen Zahlen	458
10.2	Bemerkungen zum schwachen Gesetz der großen Zahlen	459
10.3	Satz: Schwaches Gesetz der großen Zahlen	459
B	Starkes Gesetz der großen Zahlen	460
10.4	Satz: Gesetz der großen Zahlen von Borel	460
10.5	Definition: Starkes Gesetz der großen Zahlen	461
10.6	Bemerkungen zum starken Gesetz der großen Zahlen	461
10.7	Satz: Starkes Gesetz der großen Zahlen von Cantelli	462
10.8	Hilfssatz: Ungleichung von Cantelli	462
10.9	Hilfssatz: Kolmogorovsche Ungleichung	464
10.10	Hilfssatz: Lemma von Töplitz	465
10.11	Hilfssatz: Lemma von Kronecker	466
10.12	Satz: Starkes Gesetz der großen Zahlen von Kolmogorov	466
10.13	Beispiel: Das starke Gesetz der großen Zahlen für u.i.v. Zufallsvariable	467
C	Anwendungen des starken Gesetzes der großen Zahlen	468
10.14	Beispiel: Normale Zahlen	468
10.15	Beispiel: Empirische Verteilungsfunktionen und der Satz von Glivenko-Cantelli	473
10.16	Beispiel: Konsistenz von Schätzmethoden	477
10.17	Beispiele: Starke Gesetze für Punktprozesse und für Zählprozesse	479
10.18	Beispiel: Monte-Carlo-Methode zur näherungsweisen Integration	481
10.19	Zur Implementierung von stochastischen Simulations- verfahren	486
10.20	Stochastische Simulation für Gesamtschadenmodelle der Risikotheorie (Fortsetzung der Beispiele 8.16 und 9.17)	489
D	Risikoausgleich und Versicherung	492
10.21	Exkurs: Risiko, Risikoausgleich und Versicherung	492
10.22	Risikoausgleich im Kollektiv: Prämien und Ruin- wahrscheinlichkeiten im statischen individuellen Modell der Risikotheorie	494

10.23 Risikoausgleich in der Zeit: Prämien und Ruinwahrscheinlichkeiten im dynamischen kollektiven Modell der Risikotheorie	497
E Aufgaben	502
Inhaltsverzeichnis	511
Literaturverzeichnis	531
Verzeichnis versicherungs- und finanzmathematischer Beispiele und Aufgaben	535
Abbildungsverzeichnis	547
Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	551
Namenverzeichnis	561
Sachverzeichnis	563