Institut für Mathematik der Universität Rostock **WS 07/08**
Prof. Takáč
César Poupaud

Lösungsblatt 10

Aufgabe 10.1: 1. $(0,0)$ ist das einzige kritische Punkt. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0$ aber der zugehörige Eigenraum ist nur 1 dimensional. Somit ist $(0,0)$ ein instabiler Knoten 3. Art.
2. (x_1, x_2) ist ein kritisches Punkt genau dann wenn $-\beta x_2 + \alpha = 0$ und $\delta x_1 - \gamma = 0$ d.h. $x_1 = \gamma/\delta$ und $x_2 = \alpha/\beta$. Sei $y_0 = (x_1, x_2)$. Wir definieren $u = y - y_0$. Dann ist u Lösung des Systems (S):
$u' = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} u$. Der Typus und die Stabilität von y_0 fürs System sind äquivalent mit dieser von $(0,0)$ fürs neue System. Somit sollen wir nun die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ berechnen. Wir finden $\lambda_1 = \sqrt{\beta\delta}i$ und $\lambda_2 = -\sqrt{\beta\delta}i$. Folglich ist $(0,0)$ ein stabiles Zentrum für (S), und so ist y_0 für das ursprüngliches System.

Aufgabe 10.2: Nach Voraussetzung, haben die Trajektorien ein gemeinsames Punkt (x_0, y_0) d.h. existieren t_1 und t_2 sodaß $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_2) = (x_0, y_0)$. Sei $t_0 = t_2 - t_1$ und $\psi(t) = \phi_1(t - t_0)$. Dann, nach Konstruction, gilt $\psi(t_2) = \phi_1(t_1) = \phi_2(t_2)$. Außerdem, kann man einfach zeigen daß ψ eine Lösung des Systems ist. Nämlich $\psi'(t) = \phi_1'(t - t_0)$ und, da ϕ_1 eine Lösung ist, erhält man $\psi'(t) = \phi_1'(t - t_0) = F(\phi_1(t - t_0)) = F(\psi(t))$ (Hier ist es notwendig daß das System $y' = F(y)$ AUTONOM ist). Somit sind ψ und ϕ_2 zwei Lösungen des Systems mit der selben Anfangsbedingung $\psi(t_2) = \phi_2(t_2) = (x_0, y_0)$. Folglich liefert der Eindeutigkeitsatz daß $\psi = \phi_2$ d.h. für alle t, $\phi_1(t - t_0) = \phi_2(t)$. Somit besitzen ϕ_1 und ϕ_2 die selben Trajektorien in der Phasenebene.

Aufgabe 10.3: Die beide Systeme sind der Form $x' = F(x,y), y' = G(x,y)$ wobei F und G stetig partiell differenzierbar bis zum 2. Ordnung sind. Deshalb sind dies fastlinear in der Nähe ihrer kritischen Punkte.
1. Die kritischen Punkte des ersten Systems erfüllen $xy = 1, x = y^3$ d.h. $x = 1, y = 1$ oder $x = -1, y = -1$.
Der Typus und die Stabilität dieser Punkte sind mit die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}$ verbunden.
Hier erhalten wir, für $(1,1)$, die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ mit Eigenwert -2 (doppelte). Der Typus ist nicht bestimmt: es kann ein Knoten 1. order 3. Art oder ein Strudelpunkt. Jedoch, da $-2 < 0$, ist dies asymptotisch stabil.
Für $(-1,-1)$ erhalten wir die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ mit Eigenwerte $1 + \sqrt{5}$ (positiv) und $1 - \sqrt{5}$ (negativ). Somit ist $(-1,-1)$ ein instabiles Sattelpunkt.
2. Die kritischen Punkte des zweiten Systems erfüllen $(1+x)\sin y = 0, 1 - x - \cos y = 0$. Die erste Gl. liefert $x = -1$ oder $y = k\pi, k \in \mathbb{R}$. Wenn $x = -1$ gilt, liefert die zweite Gl. $\cos y = 2$ und das ist sinnlos, sodaß gilt nur $y = k\Pi$. Da das System 2π periodisch (für y) ist, ist es genug nur $y = 0$ und $y = \pi$ zu betrachten. Somit erhalten wir zwei Punkte $(0,0)$ und $(2,\pi)$. Die zugehörigen Matrixen sind $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (mit Eigenwerte i und $-i$) und $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (mit Eigenwerte $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$). Somit ist leider die Stabilität von $(0,0)$ nicht bestimmt und der Ursprung kann entweder ein Zentrum oder Strudelpunkt sein. Das Punkt $(2,\pi)$ ist ein instabiles Sattelpunkt.

Lösung zu Aufgabe 10.4 Die kritischen Punkte sind $(0,0)$ und $(1/2, 2)$. Die Matrixen der zugehörigen fastlinearen Systeme sind $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix}$ (mit Eigenwerte 1 und $-0,25$) und $\begin{pmatrix} 0 & -0,25 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (mit Eigenwerte $0,5i$ und $-0,5i$) (siehe Übung 10.3). Dann ist $(0,0)$ ein instabiles Sattelpunkt. Der Typus und

die Stabilität von $(1/2, 2)$ sind nicht bestimmt (die Eigenwerte sind rein imaginär). Es kann entweder ein Zentrum oder ein Strudelpunkt sein.
Bemerkung: Um den Typus zu bestimmen, ist es interessant die DGL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y(-0,25 + 0,5x)}{x(1 - 0,5y)}$$

zu betrachten. Sei $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$. Dann ist diese DGL äquivalent mit

$$\dot{y}\frac{1 - 0,5y}{y} = \frac{-0,25 + 0,5x}{x}$$

d.h

$$\frac{\dot{y}}{y} - 0,5\dot{y} = \frac{-0,25}{x} + 0,5.$$

Dann integrieren wir nach x und erhalten die Gleichung

$$\ln y - 0,5y = -0,25 \ln x + 0,5x + C$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Danach kann man zeigen daß die Trajektorien dieser Kurvenschar geschlossen sind und somit $(1/2, 2)$ ein stabiles Zentrum ist.

Aufgabe 10.5: Sei $(x(t), y(t))$ eine Lösung des Systems uns sei $H(t) = H(x(t), y(t))$. Dann

$$\begin{aligned}
H'(t) &= x'(t)\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \\
&= x'(t)G(x(t), y(t)) - y'(t)F(x(t), y(t)) \ \text{ (nach der Voraussetzung über } H) \\
&= x'(t)y'(t) - y'(t)x'(t) \ \text{ (denn } (x(t), y(t)) \text{ eine Lösung ist)} \\
\Rightarrow H'(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Folglich existiert eine Konstant $c \in \mathbb{R}$ so daß für alle t , $H(x(t), y(t)) = c$ gilt.
Anwendung: Einfach erfüllt die Funktion $H(x, y) = 1/2(x^2 + y^2)$ die vorigen Bedingungen. Dann sind die Trajektorien Kreise mit Zentrum $(0, 0)$. Man bemerkt auch daß die Eigenwerte der zugehörigen Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ komplex konjugiert sind. Somit ist die Ursprung ein stabil Zentrum und das ist konsistent mit den gefundenen Trajektorien.

Erklärung für die Bemerkung der Aufgabe 10.4: Wir haben geschrieben $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ aber das ist nicht sehr mathematisch (denn y nicht eine Funktion der Variable x ist). Trotzdem, mit Hilfe der Aufgabe 10.5, kann man verstehen warum ist es tatsächlich korrekt. Das Problem hier ist daß es keine geeignete Funktion H existiert sodaß $\frac{\partial H}{\partial x} = y(-0,25 + 0,5x)$ und $\frac{\partial H}{\partial y} = x(1 - 0,5y)$. Wir sollen dann etwas anders handeln: Das System liefert die folgende Gleichung: $y'x(1-0,5y) = x'y(-0,25+0,5x)$ d.h. (wenn $x \neq 0$ und $y \neq 0$)

$$\frac{y'}{y} - 0,5y' + 0,25\frac{x'}{x} - 0,5x' = 0.$$

Dann integrieren wir nach t und erhalten die Gleichung $\ln y + 0,25 \ln x - 0,5y - 0,5x = C$ wobei $c \in \mathbb{R}$.