Prof.Takac
César Poupaud WS 07/08

Lösungsblatt 2

Aufgabe 2.1: Es gilt mit Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} y'y^2 &= \frac{1}{1+x^2} \\ \Rightarrow\ 1/3y^3 &= \arctan(x) + C \\ \Rightarrow\ y &= \sqrt[3]{3\arctan(x) + C} \end{aligned}$$

mit $x > -\tan(C/3)$ oder $x < \tan(C/3)$ (denn die Diff.gl für $y(x) = 0$ nicht definiert ist).

Aufgabe 2.2: (a) Es gilt mit Trennung der Variablen $\frac{y'}{1+y^2} = \frac{x^2}{x^3+1}$. Durch Integration erhalten wir $\arctan y = \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + c$. Um diese Gleichung nach y zu lösen, musst die rechte Seite in $]-\Pi/2, \Pi/2[$ liegen, d.h. $x \in I =]\sqrt[3]{\exp(-3\pi/2 - 3C) - 1}, \sqrt[3]{\exp(3\pi/2 - 3C) - 1}[$. Dann ist die Lösung auf I dem Intervall $y = \tan(\frac{1}{3}\ln|x^3+1| + c)$.

(b) Die Gleichung hat die explizite Gestalt $y' = \exp(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x} + 3$, d.h. sie hat die Gestalt $y' = f(y/x)$ und ist

somit eine Ähnlichkeitsdiff.gl. Somit wenden wir die Substitution $z = y/x$ an und erhalten die Diff.gl.

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{\exp(z) + z + 3 - z}{x} = \frac{\exp(z) + 3}{x}.$$

Mit Trennung der Variablen folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{z'}{\exp(z) + 3} &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow -\frac{1}{3}\ln(1 + 3\exp(-z)) &= \ln|x| + C \\ \Rightarrow \ln(1 + 3\exp(-z)) &= -3\ln|x| + C \\ \Rightarrow 1 + 3\exp(-z) &= \exp(-3\ln|x| + C) = Cx^{-3} \\ \Rightarrow \exp(-z) &= \frac{Cx^{-3} - 1}{3} \\ \Rightarrow z &= -\ln(\frac{Cx^{-3} - 1}{3}) \\ \Rightarrow y &= -x\ln(\frac{Cx^{-3} - 1}{3}) \end{aligned}$$

.

Aufgabe 2.3: (a) Lösung der homogenen Gl.: $y' = 2xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x \Rightarrow \ln|y| = x^2 + c \Rightarrow y_h = ce^{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$ (enthält die triviale Lösung $y \equiv 0$). Dann suchen wir ein Lösung der inhomogenen Gl. $y' = 2xy + (1 - 2x)\exp x$ mittels Variation der Konstanten d.h. wir suchen eine Funktion c so dass $y_p = c(x)y_h$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Zuerst, nach Definition von y_p:

$$\begin{aligned} y_p' &= c'(x)y_h + c(x)y_h' \\ &= \exp(x^2)(c'(x) + 2xc(x)). \end{aligned}$$

Nun, nach Voraussetzung, genügt y_p die Gleichung $y_p' = 2xy_p + (1-2x)\exp(x)$ d.h.

$$\begin{aligned} \exp(x^2)(c'(x) + 2xc(x)) &= 2xc(x)\exp(x^2) + (1-2x)\exp x \\ \Rightarrow c'(x) &= \exp(-x^2)(1-2x)\exp x = (1-2x)\exp(x - x^2) \\ \Rightarrow c(x) &= \int (1-2t)\exp(t - t^2)dt \\ \Rightarrow c(x) &= \exp(x - x^2) \end{aligned}$$

.

Wir erhalten $y_p = \exp(x^2)\exp(x - x^2) = \exp x$ und die allgemeine Lösung hat die folgende Form:

$$y = \exp x + c\exp(x^2), \quad c \in \mathbb{R}$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 5$ gibt $c = 4$ und dann ist die Lösung $\phi(x) = \exp x + 4\exp(x^2)$.

(b) Die gegebene Gleichung ist eine Bernoulligleichung. Sie ist definiert für $x \neq 1$. Die Anfangsbedingung ist in $x = 2$ so dass wir die Differentialgleichung nur auf den Intervall $]1, +\infty[$ studieren.
Mit der Substitution $u = \frac{1}{y^2}$ erhalten wir eine lineare Diff.gl. bezüglich u

$$u' \;=\; -2\frac{y'}{y^3} = \frac{2}{y^2(x-1)y} + 2(x-1) = 2\frac{u}{x-1} + 2(x-1),$$

die wir mittels Variation der Konstanten lösen können. Die Lösung der homogenen Gleichung ist $u_h = c(x-1)^2$ und eine Lösung der inhomogenen lautet demzufolge $u_p = 2(x-1)^2\ln(x-1)$. Somit hat die allgemeine Lösung die Form:$u = 2(x-1)^2\ln(x-1) + c(x-1)^2$. Die Anfangsbedingung $y(2) = 1$ gibt $u(2) = 1$ und somit $c = 1$. Folglich erhalten wir die Lösung $y = \dfrac{1}{\sqrt{2(x-1)^2\ln(x-1) + (x-1)^2}} = \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{2\ln(x-1)+1}}$.

Aufgabe 2.4: (a) Sei $f(x) = \sum_0^N a_n x^n$ $(a_N \neq 0)$ eine Polynomfunktion, die die Diff.gl. erfüllt. Dann gilt

$$(x+1)\sum_1^N n a_n x^{n-1} + \sum_0^N a_n x^{n+1} \;=\; x^2 - x + 1$$

Somit erhalten wir $a_N x^{N+1} = x^2$ d.h. $N = 1$, $a_1 = 1$ und dann $a_0 = -2$. Folglich ist $f(x) = x - 2$ eine Lösung.

(b) Wir können die Diff.gl. wie folgt schreiben: $y' = -\frac{x}{x+1}y + \frac{x^2-x+1}{x+1}$. Diese Diff.gl. ist linear so dass die allgemeine Lösung die Form $y = y_h + y_p$ hat, wobei y_h die Lösung der homogenen Gl. ist und y_p eine besondere Lösung der inhomogenen Gl. Z.b. wählen wir $y_p = x - 2$ (aus (a)). Für die homogene Gl., schreibt man zuerst $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ so dass eine Stammfunktion von $-\frac{x}{x+1}$ die Funktion $\ln|x+1| - x$ ist. Daher gilt $y_h = c(x+1)\exp(-x)$ und $y = c(x+1)\exp(-x) + x - 2$.

(c) $y(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2ce^{-1} - 1 \Rightarrow c = e$ und $y = (x+1)\exp(-x+1) + x - 2$.