Was haben dünne Schichten mit einer Verallgemeinerung der Kreiszahl π zu tun?

Wolf-Dieter Richter

Interdisziplinäre Ringvorlesung
Strukturen und Symmetrien

11. 11. 2008

Zusammenfassung

Die grundlegenden Verhältnisse zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises bzw. zwischen Flächeninhalt und dem Radiusquadrat werden bekanntlich durch die Kreiszahl Pi widergespiegelt. Analoge Beziehungen führen zu einer Verallgemeinerung von Pi , wenn man sogenannte p-Kreise ($|x|^p + |y|^p = r^p; p > 0$) mit ”p-Radius” r betrachtet und auch den Begriff des Umfangs geeignet, nichteuklidisch, anpasst. Das Wesen dieser Begriffsbildungen offenbart sich insbesondere bei der Behandlung des entsprechend verallgemeinerten isoperimetrischen Problems und beim Studium dünner Schichten. Letzteres führt schließlich zu einer Renaissance und Fortentwicklung der oft nur noch aus der Mathematik-Geschichte bekannten Methode der Unteilbaren von Cavalieri und Torricelli.
Für Anwendungen in unterschiedlichen Richtungen öffnet sich damit ein neuer Ansatz.

Aus aktuellem Anlass...

Wer am heutigen Tag der Sessionseröffnung des Karnevals 2008/2009 einen Mathe-Vortrag besucht, ist ein wahrer...

...

Mathe - Пonier

Eine Klarstellung

- Verallgemeinerung einer Zahl ?
- Verallgemeinerung einer Aussage !
- Unter schwächeren Voraussetzungen eine "dem Wesen nach gleiche" Aussage beweisen.
- Der bekannte Fall soll sich als Spezialfall wieder ergeben.
- Die zu verallgemeinernde Aussage über π wird sich in ihrer endgültigen Form erst nach umfangreichen Vorbereitungen durch Verknüpfung von mehreren Teilaussagen ergeben.

Mit welchen Aussagen man beginnen könnte...

DER GROßE DUDEN, 1966, über π...

Pi, das,-[s](österr auch -)(griech. Buchstabe: Π, π);*Math* Zahl des Verhältnisses zw. Kreisumfang u. -durchmesser [Ludolfsche Zahl: 3,14159...])

Auf der Internetseite der DMV 'Mathematik.de' findet man das noch heute so ähnlich...

Denkt man sich irgendeinen Kreis mit dem Durchmesser d und Umfang U, so ist die Zahl π als das Verhältnis U/d definiert...

.

.

.

Man kann π ohne Verwendung geometrischer Begriffe einführen, es gibt eine rein analytische Möglichkeit. Durch diesen Zugang wird auch deutlich, dass π mit Schwingungen zusammenhängt.

...diese analytische Definition lautet...

Man geht von dem Problem aus, die Bewegung eines Massenpunktes zu beschreiben, für den die auf ihn wirkende Kraft proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage ist.

.

.

.

Man kann dann zeigen, dass es genau eine Lösung dieses Problems gibt, diese Funktion wird die Sinusfunktion genannt und mit sin x bezeichnet. Die Zahl π wird dann erklärt als die kleinste positive Zahl x, für die sin x = 0 gilt.
Das scheint sehr schwerfällig zu sein. Der Vorteil dieses Zugangs besteht jedoch darin, dass man nicht an die Anschauung appellieren muss. Außerdem spart man sich den Beweis, dass das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser bei allen Kreisen gleich ist. Auch wird der Charakter von π als diejenige Zahl deutlich, die zum Verständnis einfacher Schwingungen fundamental ist.

Die Entscheidung für eine geometrische Fragestellung zur Verallgemeinerung von π

- Gibt es für jeden p-Kreis $C_p(r) = r \cdot C_p$,

$$C_p = \{(x, y) \in R^2 : \underbrace{(|x|^p + |y|^p)^{1/p}}_{=:|(x,y)|_p} = 1\}$$

  eine Kreiszahl, $\pi(p), p > 0$?
  Die Größe r heißt p-Radius .
- Gilt die im Falle $p = 2$ bekannte Formel für dünne Schichten

$$A(\{(x, y) \in R^2 : r < |(x, y)|_p < r+\varepsilon\}) \sim 2\pi(p)r\varepsilon,\ \varepsilon \to 0$$

  bei beliebiger Wahl von $p > 0$?
- Welche weiteren von π widergespiegelten Kreis-Eigenschaften lassen sich beibehalten?

Die üblichen Vorbereitungen...

...oder: Eulen nach Athen...

- $(R^2, d(.,.))$, $d(.,.)$...euklidischer Abstand.
- $d((x,y),(u,v)) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$.
- Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt gleichen Abstand haben, z.B. $\{(x,y) \in R^2 : d((x,y),(0,0)) = r\}$, oder einfach $x^2 + y^2 = r^2$.
- Abstände sind von Richtung unabhängig.
- Durchmesser d= max. Abst. zweier Punkte im Kreis.
- Euklidische Länge des Kreises $C_2(r)$:
  $$U = 4\int_0^r \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \pi d, y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$
- Flächeninhalt $A = \pi(d/2)^2$.
- Unabhängig von r gilt: $\frac{U}{d} = \pi = \frac{A}{(d/2)^2}$.

Einstimmung auf die Verallgemeinerung...

...gelegentlich gegenteilig denken...

- Der p-Kreis $C_p(r)$ mit dem p-Radius r bildet den geometrischen Ort aller Punkte, die denselben Abstand vom Punkt $(0,0)$ haben.
- Abstände sind nun also von Richtung abhängig.
- Übung: Wir zeichnen zwei Polygonzüge der p-Länge 4, und zwar für $p = 1/2$ und $p = 1$...
- $K_p(r) = r \cdot K_p$...von $C_p(r)$ eingeschl. p-Kreisscheibe.
- Mit $h_{K_p}(x,y) := \inf\{\lambda > 0 : (x,y) \in \lambda K_p\}$,
  kleinstes $\lambda > 0$ so, dass λK_p den Punkt (x,y) "gerade so einfängt",
  gilt für $(x,y) \in C_p(r)$: $h_{K_p}(x,y) = r$,
  d.h. p-Radius=Minkowski-Funktional;
  $p = 2 \Rightarrow r = \frac{d}{2}$.

Nachdem der Durchmesser ersetzt wurde, bereiten wir die Ersetzung der euklidischen Bogenlänge vor...

$$U = 4\int\limits_0^r \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = 4\int\limits_0^r |y'(x)\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}|_2 dx$$

mit

$$y'(x)\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} = NV(x).$$

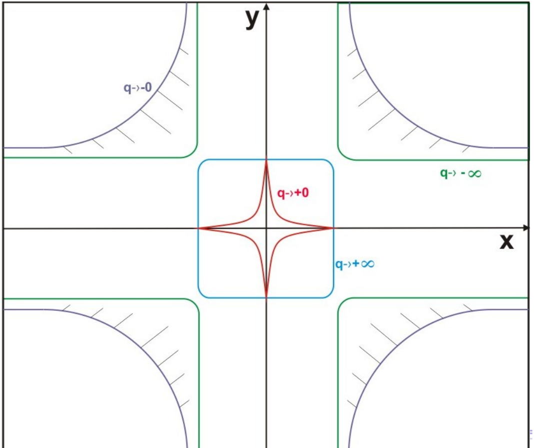
$$U = 4\int\limits_0^r |(y'(x), -1)|_2 dx$$

$$= 4\int\limits_0^r h_{K_2}(y'(x), -1)dx.$$

Ersetzen künftig die euklidische Norm durch das Minkowski-Funktional h_{K_q}...

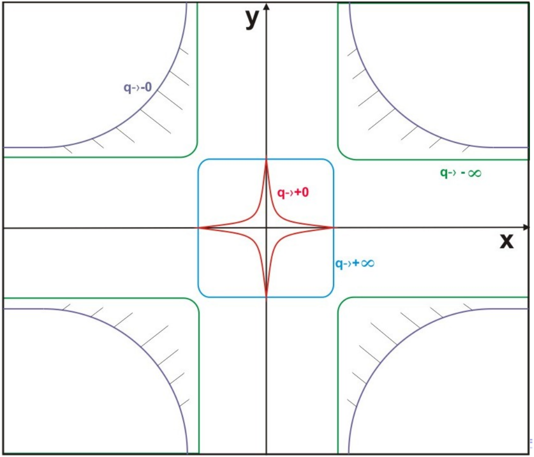
... einer der Sternmengen

$$K_q = \{(x,y) \in R^2 : |(x,y)|_q^q \leq 1\} = \begin{cases} \{|(x,y)|_q \leq 1\} \text{ if } q > 0, \\ \{|(x,y)|_q \geq 1\} \text{ if } q < 0. \end{cases}$$



Definieren die q-Bogenlänge des p-Kreises

- $AL_{p,q} := 4 \int\limits_0^r h_{K_q}(y'(x), -1)dx,\ y(x) = (r^p - x^p)^{1/p}.$
- $$\text{Werden } q \text{ spezifizieren } \in \begin{cases} [1, \infty) \text{ if } p \geq 1, \\ (-\infty, 0) \text{ if } p \in (0, 1). \end{cases}$$



Teil-Aussagen über π

- Umfangs- und Flächeninhalts-Eigenschaften: $\frac{U(r)}{2r} = \pi = \frac{A(r)}{r^2}, r > 0.$
- $\Rightarrow$Indivisiblen-Eigenschaft :$A(r) = \int\limits_0^r U(\varrho) d\varrho$.
- Folgerung aus der Koflächen-Formel: Integriert man den q-Umfang der selben Kreise, so ergibt sich der Flächeninhalt nur g.d., w. $q = 2$.
  $\rightarrow$ Methode der Unteilbaren: Cavallieri und Torricelli.
- Eigenschaft einer dünnen Schicht: $A(r+\varepsilon) - A(r) \approx 2\pi r\varepsilon = U(r)\varepsilon$.
- Isoperimetrie-Eigenschaft: Unter allen Kurven der Länge 2π schließt der Kreis mit Radius 1 eine Fläche mit dem größtmöglichen Flächeninhalt, nämlich π, ein.
- Gleichverteilungs-Eigenschaft: Erklärung später.

Gleich am Ziel!

Die endgültige Wahl des Längenmaßes...

- Eine Lösung des l_{2,p^*}-isoperimetrischen Problems für $p^* \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ hat notwendig die Gestalt des $l_{2,p}$-Kreises mit $p > 0$ aus:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1, \text{ d.h., } p^* = \frac{p}{p-1} \in \begin{cases} [1, \infty) \text{ falls } p \geq 1, \\ (-\infty, 0) \text{ falls } p \in (0, 1). \end{cases}$$

- $A_p(r) = \int\limits_0^r AL_{p,q}(\varrho) d\varrho$ g.d.w. $q = p^*$.
- Interpretation
  - Erweiterung der Methode der Unteilbaren.
  - Weiterer 'Mutmacher':Geometrie von $(R^2, |(.,.)|_{p^*})$ 'steht der Euklidischen nahe' i.S. der Präambel HP 4.

...und endlich die π-Funktion:

- $$\frac{A_p(r)}{r^2} = \frac{AL_{p,p^*}(r)}{2r} = A_p \quad =: \pi(p), p > 0 \quad !!!$$

Zum Durchhalten...

No πsa here !

Integral-Darstellungen für $\pi(p)$

- $\pi(p) = 4\int_0^1 (1 - y^p)^{\frac{1}{p}} dy$
- $\quad = 4\int_0^\infty (1 + \tau^p)^{-\frac{2}{p}-1} d\tau$
- $\quad = 2\int_0^1 (1 - \mu^p)^{\frac{1-p}{p}} d\mu$
- $\quad = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(|\cos\varphi|^p + |\sin\varphi|^p)^{2/p}}.$

'HA' 1.)Was bedeutet die Sonderrolle des Falles $p = 2$?

'Stochastische Methode' zur Bestimmung von $\pi(p)$ ...

$$\pi(p) = A_p = \frac{2(\Gamma(\frac{1}{p}))^2}{p\Gamma(\frac{2}{p})},\ p > 0.$$

Beweis Es reicht, das Integral I_p zu betrachten:

$$a) \quad I_p := \int\limits_{\{(x,y)\in R^2\}} e^{-|(x,y)|_p^p} d(x,y) = (\int\limits_R e^{-|t|^p} dt)^2\,;$$

$$b) \quad I_p = \int\limits_{\{(x,y)\in R^2\}} \left(\int\limits_{t=|(x,y)|_p}^{\infty} \frac{d}{dt}[e^{-t^p}]dt \right) d(x,y) =$$

$$\int\limits_{t=0}^{\infty} pt^{p-1} e^{-t^p} A(\{(x,y) : |(x,y)|_p < t\})dt = A_p \int\limits_0^{\infty} pt^{p+1} e^{-t^p} dt.$$

Zur numerischen Größe von $\pi(p)$...

No πvot$\in$s here!

Ausgewählte Werte von $\pi(p)$

p	0,113	1/4	0,3	1/3	1/2	0,607
$\pi(p)$	0,0001	2/35	0,1323	1/5	2/3	0,9992
p	0,783	0,99995				
$\pi(p)$	1,5	1,9999				

$$\pi(p) = \frac{4\pi^{1/2}}{p^{1/2}2^{2/p}}(1 + \frac{p}{8} + O(p^2)), p \to +0.$$

'HA' 2.) Was bedeutet diese Sonder-Rolle der Archimedes-Zahl $\pi = \pi(2)$?
3.) Geben Sie eine asymptotische Darstellung für $4 - \pi(p)$ an, wenn $p \to \infty$!

p	1	12/11	1,482	2	3	4,245	5
$\pi(p)$	2	2,172	e	π	3,533	3,736	3,801
p	10	255					
$\pi(p)$	3,9429	3,999					

Verallgemeinerung der Methode der Unteilbaren von Cavalieri-Torricelli unter Verwendung nicht-euklidischer Bogenlängen-Messungen...

Mit der q-Länge der p-Kreis Teilmenge M,

$$AL_{p,q}(M) = \int\limits_{\{x:(x,y(x))\in M\}} (1 + |y^{'}(x)|^q)^{1/q} dx,$$

$$M \subset \mathfrak{B}(C_p(r)), y(x) = (r^p - |x|^p)^{1/p},$$

genügt der Flächeninhalt der Darstellung

$$A(B) = \int\limits_0^\infty AL_{p,p^*}(B \cap C_p(r))dr, p > 0, B \subset \mathfrak{B}^2.$$

Die Analyse dünner Schichten führt ebenfalls zur p^*-Bogenlänge von p-Kreis Teilmengen...

Von $M \in \mathfrak{B}(C_p)$ aufgespannter Sektor:

$$sector_p(M, \varrho) = \{(x, y) \in K_p(\varrho) : \frac{(x, y)}{|(x, y)|_p} \in M\}.$$

Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{A(sector_p(M, \varrho + \varepsilon)) \setminus A(sector_p(M, \varrho))}{\varepsilon}$$

$$= AL_{p,p^*}(M).$$

Gleichverteilungseigenschaft

...eigentlich wollte ich nur diese Formel haben...

Sei ω das in der Literatur, salopp, Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}(C_p)$ genannte Maß. Dann gilt

$$\omega(M) = \frac{AL_{p,p^*}(M)}{2\pi(p)}, M \in \mathfrak{B}(C_p).$$

In scheinbar aussichtsloser Situation half mir ein Forschungssemester auf den Weg...

Nach grundlegenden Arbeiten von Schechtman/Zinn(1990), Rachev/Rüschendorf(1991), Song/Gupta(1997), und eigenen Untersuchungen resümierte P.J. Szablowski in der Arbeit

Uniform distribution on spheres in finite dimensional L_α and their generalisations. J. Mult. Anal., 64,2(1998), 103-117:

"... it seems that the word 'uniform' does not refer to the real, geometrical uniformity of the probability mass on the surface of the unit sphere."

Noch ein Mutmacher war...

Heinrich von Tessenow

Das Einfache ist nicht immer das Beste.
Aber das Beste ist immer einfach.

Hier die Originalquellen:

RICHTER,W.-D. *On $l_{2,p}$-circle numbers.* Lith. Math. J., 48(2): 228-234, 2008.

—”— *On the π-function for non-convex $l_{2,p}$-circle discs.* Lith. Math. J., 48(3): 332-338, 2008.

In diesen Arbeiten wird zurück gegriffen auf:

—”— *Generalized spherical and simplicial coordinates.* J. Math. Anal. Appl., 336 (2007), 1187-1202.

Eine n-dimensionale Verallgemeinerung von π erscheint alsbald in:

—”— *Continuous $l_{n,p}$-symmetric distributions.* Accepted for print, 2008.

Farewell...

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit
und
schönen Karnevalsabend mit

πNIENKERNEN,

CAIπ,

πWO

und

πROGGEN !