

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note

Prüfung Mathematik I, Studiengänge ET und IT/TI, 11.02.2008

Hinweise:

- Der Lösungsweg der bearbeiteten Aufgaben muss vollständig und lückenlos dargestellt werden. Ergebnisse ohne Begründung bzw. Lösungsweg werden nicht gewertet.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlungen (auch eigene), Taschenrechner
- Nicht* zugelassen sind unter anderem Vorlesungs- und Übungsmitschriften, Lösungen der in den Übungsserien gestellten Aufgaben, Lehrbücher.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Man berechne $(1 + 2i)(2 - i)$ und $\frac{1 + 2i}{2 - i}$.

b) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 8i$ an!

Hierbei bezeichnet i die imaginäre Einheit.

Die Ergebnisse sind in der Kartesischen Form $z = a + bi$ anzugeben!

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n + 2n^2}{3 - 2n + 3n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 - n})$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

a) $y = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$

b) $y = x \sin(x^2 + 1)$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = 4 \ln x + \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0.$$

- In welchen Intervallen ist die Funktion monoton wachsend, in welchen monoton fallend?
- Geben Sie alle Extremalstellen sowie die Art des Extremums an!
- Berechnen Sie den (rechtsseitigen) Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow +0$!
- Berechnen Sie die größere der beiden Nullstellen näherungsweise mit dem Newtonverfahren (Startwert $x_0 = 1/2$, 2 Iterationen)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\int \frac{x^2 - x - 12}{x(x^2 + 4)} dx$ b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

Hierbei ist nur die Tabelle der Grundintegrale (s. unten) zu verwenden.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \left(\frac{x}{3} - 1\right) \sqrt{x}$ für $x \geq 0$.

- a) Berechnen Sie die Fläche der Figur zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x -Achse!
- b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = f(x)$ zwischen den beiden Schnittpunkten mit der x -Achse!

Aufgabe 7 (5 Punkte)

- a) Unter der Verwendung der Potenzreihen von $\sin x$ und $\cos x$ stelle man die Potenzreihe (mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$) für die Funktion $f(x) = \sin x - x \cos x$ auf.
- b) Mit Hilfe der Reihenentwicklung aus Aufgabe a) berechne man das Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} dx$$

näherungsweise mit einer Genauigkeit von 10^{-3} . Wieviel Reihenglieder müssen hierzu berücksichtigt werden?

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Die 2π -periodische Funktion $f(x)$ sei im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < 0, \\ \pi - x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-2\pi, +2\pi]$!
- b) Stellen Sie die Fourierreihe für die Funktion bis zu den Gliedern $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ auf!
- c) In welchen Punkten stimmt die Summe der Fourierreihe mit $f(x)$ überein?

Liste der Grundintegrale:

- 1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ für $\alpha \neq -1$, $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- 2) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ für $a \neq 0$,
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + C$ für $a \neq 0$
- 4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ für $a > 0$, $a \neq 1$
- 5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$
- 6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$