

Name: \_\_\_\_\_ Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$	Note

## Prüfung Mathematik I, Studiengänge ET und IT/TI, 11.02.2008

### Hinweise:

- Der Lösungsweg der bearbeiteten Aufgaben muss vollständig und lückenlos dargestellt werden. Ergebnisse ohne Begründung bzw. Lösungsweg werden nicht gewertet.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlungen (auch eigene), Taschenrechner
- Nicht* zugelassen sind unter anderem Vorlesungs- und Übungsmitschriften, Lösungen der in den Übungsserien gestellten Aufgaben, Lehrbücher.

### **Aufgabe 1** ..... (6 Punkte)

a) Man berechne  $(1 + 2i)(2 - i)$  und  $\frac{1 + 2i}{2 - i}$ .

b) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung  $z^3 = 8i$  an!

Hierbei bezeichnet  $i$  die imaginäre Einheit.

Die Ergebnisse sind in der Kartesischen Form  $z = a + bi$  anzugeben!

### **Aufgabe 2** ..... (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n + 2n^2}{3 - 2n + 3n^2}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 - n})$

### **Aufgabe 3** ..... (3 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

a)  $y = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$

b)  $y = x \sin(x^2 + 1)$

### **Aufgabe 4** ..... (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = 4 \ln x + \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0.$$

- In welchen Intervallen ist die Funktion monoton wachsend, in welchen monoton fallend?
- Geben Sie alle Extremalstellen sowie die Art des Extremums an!
- Berechnen Sie den (rechtsseitigen) Grenzwert von  $f(x)$  für  $x \rightarrow +0$ !
- Berechnen Sie die größere der beiden Nullstellen näherungsweise mit dem Newtonverfahren (Startwert  $x_0 = 1/2$ , 2 Iterationen)

**Aufgabe 5** ..... (6 Punkte)

Man berechne die folgenden Integrale:

a)  $\int \frac{x^2 - x - 12}{x(x^2 + 4)} dx$                       b)  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

Hierbei ist nur die Tabelle der Grundintegrale (s. unten) zu verwenden.

**Aufgabe 6** ..... (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \left(\frac{x}{3} - 1\right) \sqrt{x}$  für  $x \geq 0$ .

- a) Berechnen Sie die Fläche der Figur zwischen der Kurve  $y = f(x)$  und der  $x$ -Achse!
- b) Berechnen Sie die Länge der Kurve  $y = f(x)$  zwischen den beiden Schnittpunkten mit der  $x$ -Achse!

**Aufgabe 7** ..... (5 Punkte)

- a) Unter der Verwendung der Potenzreihen von  $\sin x$  und  $\cos x$  stelle man die Potenzreihe (mit der Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$ ) für die Funktion  $f(x) = \sin x - x \cos x$  auf.
- b) Mit Hilfe der Reihenentwicklung aus Aufgabe a) berechne man das Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} dx$$

näherungsweise mit einer Genauigkeit von  $10^{-3}$ . Wieviel Reihenglieder müssen hierzu berücksichtigt werden?

**Aufgabe 8** ..... (6 Punkte)

Die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f(x)$  sei im Intervall  $-\pi \leq x \leq \pi$  wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < 0, \\ \pi - x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall  $[-2\pi, +2\pi]$  !
- b) Stellen Sie die Fourierreihe für die Funktion bis zu den Gliedern  $\cos(2x)$ ,  $\sin(2x)$  auf!
- c) In welchen Punkten stimmt die Summe der Fourierreihe mit  $f(x)$  überein?

**Liste der Grundintegrale:**

- 1)  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$  für  $\alpha \neq -1$ ,  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- 2)  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$  für  $a \neq 0$ ,
- 3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + C$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + C$  für  $a \neq 0$
- 4)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$  für  $a > 0$ ,  $a \neq 1$
- 5)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ,  $\int \cos x dx = \sin x + C$
- 6)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$ ,  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$