

Name: \_\_\_\_\_ Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$	Note

## Prüfung Funktionentheorie und Laplacetransformation, Studiengänge ET und IT/TI, 23.02.2011

### Hinweise:

1. Der Lösungsweg der bearbeiteten Aufgaben muss vollständig und lückenlos dargestellt werden. Ergebnisse ohne Begründung bzw. Lösungsweg werden nicht gewertet.
2. Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlungen (auch eigene), Taschenrechner
3. *Nicht* zugelassen sind unter anderem Vorlesungs- und Übungsmitschriften, Lösungen der in den Übungsserien gestellten Aufgaben, Lehrbücher.

### **Aufgabe 1** ..... (6 Punkte)

a) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

b) Mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes finde man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 5y = 7 - 5x.$$

c) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y'' - 2y' + 5y = 7 - 5x, \quad y(0) = y'(0) = 0!$$

Alle Ergebnisse sind in der reellen Form anzugeben!

### **Aufgabe 2** ..... (7 Punkte)

a) Man löse das homogene Differentialgleichungssystem

$$y_1' = y_1 + 4y_2, \quad y_2' = y_1 + y_2.$$

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y_1' = y_1 + 4y_2 + \frac{2}{e^x + 1}, \quad y_2' = y_1 + y_2 - \frac{1}{e^x + 1}$$

mittels Variation der Konstanten!

### **Aufgabe 3** ..... (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Werte (die Ergebnisse sind in der Form  $a + bi$  anzugeben):

a)  $e^{2+i\pi/3}$     b)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - i\right)$ ,    c)  $\ln(\sqrt{3} + i)$  (Hauptwert des Logarithmus)

**Aufgabe 4** ..... (5 Punkte)

a) Ist die Funktion

$$w = x^2 - y^2 + 3x + i(2xy + 3y)$$

holomorph? Wenn ja, stelle man  $w$  in direkter Abhängigkeit von  $z = x + iy$  (d.h. in der Form  $w = f(z)$ ) dar.

b) Man berechne das Integral  $\int_C f(z) dz$ , wenn  $C$  die Parabel  $z = t + it^2$  mit  $0 \leq t \leq 1$  (d.h.  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ) ist.

**Aufgabe 5** ..... (6 Punkte)

a) Welche Singularitäten besitzt die Funktion  $f(z) = \frac{1}{1 - 2 \cos 2z}$  ?

b) Berechnen Sie das Residuum in den singulären Punkten!

c) Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral von  $f(z)$  längs des Kreises  $|z| = 1$ !

Alle Ergebnisse sind in der algebraischen Form  $a + bi$  anzugeben!

**Aufgabe 6** ..... (6 Punkte)

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$y' - y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad \text{mit } f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{für } t \geq 1. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Bildfunktion  $F(p)$  von  $f(t)$  !

b) Stellen Sie die Gleichung für die Bildfunktion  $Y(p)$  von  $y(t)$  auf!

c) Welche Lösung besitzt die Anfangswertaufgabe?

.....  
Hinweis zu Aufgabe 6: Es gilt  $\frac{1}{p^n(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} + \dots - \frac{1}{p^n}$