

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note

Prüfung Mathematik II, Studiengänge ET und IT/TI, 15.07.2008

Hinweise:

- Der Lösungsweg der bearbeiteten Aufgaben muss vollständig und lückenlos dargestellt werden. Ergebnisse ohne Begründung bzw. Lösungsweg werden nicht gewertet.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlungen (auch eigene), Taschenrechner
- Nicht* zugelassen sind unter anderem Vorlesungs- und Übungsmitschriften, Lösungen der in den Übungsserien gestellten Aufgaben, Lehrbücher.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben ist die Ebene ε durch die drei Punkte $A(1, 2, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(2, 0, -1)$.

- Wie lautet die Gleichung der Ebene in der parameterfreien Form $ax + by + cz = d$?
- Welchen Abstand hat der Koordinatenursprung von der Ebene ε ?
- Welchen Flächeninhalt besitzt das Dreieck ABC ?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen A und B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von a ist die Matrix A invertierbar?

Hinweis: Benutzen Sie den Entwicklungssatz für die Berechnung der Determinante von B !

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + ax_4 &= 13 \end{aligned}$$

Hierbei ist a eine gegebene reelle Zahl.

- Für welche a besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung, für welche a gibt es mehr als eine Lösung?
- In beiden Fällen bestimme man die Lösungsmenge mit Hilfe des Gauß-Algorithmus!

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{x}{x - y} \quad \text{für } x \neq y.$$

- Berechnen Sie die partiellen Ableitungen!
- Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$ an!
- Wie groß ist die Richtungsableitung im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$ für den Richtungsvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Man bestimme die relativen Extremalstellen der Funktion

$$z = x^2 + 5y^2 - x^2y + 2y^3$$

und gebe die Art der Extrema an!

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Man berechne das ebene Bereichsintegral $\iint_B x \, db$ für die folgenden beiden Bereiche B :

- B ist begrenzt durch die Geraden $y = 2 - x$ und die Parabel $y = x^2$,
- B ist der Teil des Kreises $x^2 + y^2 \leq 4$, der oberhalb der Geraden $y = x$ liegt.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten in Aufgabe b)!

Aufgabe 7 (6 Punkte)

- Man berechne das ebene Kurvenintegral $\int_C (x^2 + 2y + 1) \, dx + (ax + y + 2) \, dy$, wenn C die Parabel $y = 1 - x^2$ von $A(0, 1)$ nach $B(1, 0)$ ist!
- Für welche Werte des Parameters a ist das Kurvenintegral vom Weg unabhängig? Für diese Werte berechne man das Potential des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} x^2 + 2y + 1 \\ ax + y + 2 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Gegeben ist die lineare Differentialgleichung

$$y' + \frac{1}{x+2} y = 3x$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!
- Bestimmen Sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt!