Name:____________________ Matrikelnummer:_______________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note

Prüfung Analysis I,

Studiengang Physik, 17.02.2009

Hinweise:

1. Der Lösungsweg der bearbeiteten Aufgaben muss vollständig und lückenlos dargestellt werden. Ergebnisse ohne Begründung bzw. Lösungsweg werden nicht gewertet.
2. Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlungen (auch eigene), Taschenrechner
3. *Nicht* zugelassen sind unter anderem Vorlesungs- und Übungsmitschriften, Lösungen der in den Übungsserien gestellten Aufgaben, Lehrbücher.

Aufgabe 1 .... (6 Punkte)

a) Man bestimme alle (komplexen) Lösungen der biquadratischen Gleichung

$$z^4 - 4z^2 + 16 = 0.$$

Die Lösungen sind in der Kartesischen Form $z = x + iy$ anzugeben!

b) Stellen Sie das Polynom $p(x) = x^4 - 4x^2 + 16$ als Produkt zweier reeller quadratischer Polynome dar!

Aufgabe 2 .... (6 Punkte)

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für

a) $a_n = \dfrac{1 + 2n - n^2}{1 + 4n^2}$

b) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

c) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

Aufgabe 3 .... (7 Punkte)

Welche der folgenden Reihen sind konvergent? (Begründung!) Für die betreffenden Reihen berechne man den Summenwert!

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, 3^{-n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{e} - 1)$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Aufgabe 4 .... (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x^2 - 3)\, e^{-x^2}$

a) In welchen Intervallen ist die Funktion monoton wachsend bzw. fallend?

b) Geben Sie alle relativen und die absoluten Extremalstellen an!

c) Welchen Grenzwert besitzt $f(x)$ für $x \to \pm\infty$?

Aufgabe 5 .... (5 Punkte)

Ein Fahrzeug soll in möglichst kurzer Zeit vom Punkt (0 km,0 km) zum Punkt (30 km,10 km) fahren. Auf der Straße (im Modell die x-Achse) kann es 50 km/h fahren, im Gelände (d.h. außerhalb der x-Achse) nur 20 km/h. An welcher Stelle muss es die Straße verlassen? (Auf die Überprüfung der hinreichenden Bedingung für ein relatives Extremum darf verzichtet werden.)

Aufgabe 6 .... (4 Punkte)

Mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel bestimme man die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt[n]{a} - 1)$ für $a > 0$

Aufgabe 7 .... (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x+9}$

a) Stellen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für $f(x)$ mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ auf!

b) Mit Hilfe der Taylorentwicklung von $f(x)$ aus Aufgabe a) berechne man näherungsweise $f(1) = \sqrt{10}$. Schätzen Sie den Fehler mit Hilfe einer geeigneten Fehlerformel ab!

Aufgabe 8 .... (8 Punkte)

Durch Zurückführung auf die unten angegeben Grundintegrale (d.h. mit Hilfe von Intgrationsregeln bzw. Partialbruchzerlegung) berechne man die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int x \sin x \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(x-1)^2}\, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$

Liste der Grundintegrale:

1) $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ für $\alpha \neq -1$, $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$

2) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ für $a \neq 0$,

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + C$ für $a \neq 0$

4) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}$ für $a > 0$, $a \neq 1$

5) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$