Name:____________________ Matrikelnummer:________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note

Prüfung Analysis III,

Studiengang Physik, 08.02.2010

Hinweise:

1. Der Lösungsweg der bearbeiteten Aufgaben muss vollständig und lückenlos dargestellt werden. Ergebnisse ohne Begründung bzw. Lösungsweg werden nicht gewertet.
2. Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlungen (auch eigene), Taschenrechner
3. *Nicht* zugelassen sind unter anderem Vorlesungs- und Übungsmitschriften, Lösungen der in den Übungsserien gestellten Aufgaben, Lehrbücher.

Aufgabe 1 .... (8 Punkte)

Gegeben ist das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$y_1' = 2y_1 - y_2 + 2e^x, \quad y_2' = 5y_1 - 2y_2 + 1.$$

a) Wie lautet die allgemeine Lösung (in der reellen Form) des zugehörigen homogenen Systems $y_1' = 2y_1 - y_2$, $y_2' = 5y_1 - 2y_2$?

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des gegebenen inhomogenen Systems mit einem geeigneten Ansatz! Wie lautet die allgemeine Lösung?

Aufgabe 2 .... (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der Funktion $w = \dfrac{z}{1-\overline{z}}$!

b) Stellen Sie die komplexe Funktion $w = x^2 + ixy$ in Abhängigkeit von $z = x+iy$ und $\overline{z} = x - iy$ dar! Ist die Funktion holomorph?

Aufgabe 3 .... (6 Punkte)

Man berechne die folgenden Werte:

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + i\right)$, b) e^{2+i} c) $\ln \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

Die Ergebnisse sind in der algebraischen Form $x + iy$ anzugeben, bei Aufgabe c) ist der Hauptwert der Logarithmusfunktion gemeint.

Aufgabe 4 .... (4 Punkte)

Man berechne das komplexe Kurvenintegral $\displaystyle\int_C (1+z)\,\overline{z}\,dz$ für den Einheitskreis $|z| = 1$, welcher entgegen der Uhrzeigerrichtung durchlaufen wird. Warum widerspricht das Ergebnis nicht dem Cauchyschen Integralsatz, wonach das Integral holomorpher Funktionen über geschlossenen Kurven gleich Null ist?

Aufgabe 5 .... (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z(z^2+1)}$.

a) Geben Sie alle Singularitäten von $f(z)$ sowie deren Art an!

b) Berechnen Sie das Residuum an den Polstellen!

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C f(z)\,dz$ für den Kreis $|z| = 2$!

Die Ergebnisse in den Aufgaben b) und c) sind in der algebraischen Form $x + iy$ anzugeben.

Aufgabe 6 .... (5 Punkte)

Es sei $H = \mathbb{R}^2$ der Hilbertraum aller reellen Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit dem Skalarprodukt $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$. In H sei der Operator

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man zeige, dass A beschränkt in H ist und berechne die Norm des Operators!

b) Ist A selbstadjungiert?

c) Geben Sie die Eigenwerte von A an!

Aufgabe 7 .... (6 Punkte)

Im Hilbertraum $H = L_2(0,1)$ aller reellwertigen quadratisch integrierbaren Funktionen $x(t)$ über dem Intervall $(0,1)$ mit dem Skalarprodukt $(x, y) = \int_0^1 x(t)\; y(t)\,dt$ sei der Operator

$$A\,x(t) = (t+1)\,x(t)$$

gegeben.

a) Man zeige, dass A beschränkt ist und schätze die Norm von A nach oben ab!

b) Geben Sie die Eigenwerte von A an!

c) Bestimmen Sie das Spektrum des Operators!

Aufgabe 8 .... (6 Punkte)

Es seien x und y Elemente des reellen Hilbertraums H, wobei $x \neq 0$ und $y \neq 0$ ist. Man zeige:
x und y sind genau dann orthogonal, wenn

$$\|x + \alpha y\| > \|x\| \quad \text{für alle reellen } \alpha \neq 0$$

gilt!