Name:____________________ Matrikelnummer:________________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

# Prüfung Analysis II,

# Studiengang Physik, 10.08.2009

Hinweise:

1. Der Lösungsweg der bearbeiteten Aufgaben muss vollständig und lückenlos dargestellt werden. Ergebnisse ohne Begründung bzw. Lösungsweg werden nicht gewertet.
2. Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlungen (auch eigene), Taschenrechner
3. *Nicht* zugelassen sind unter anderem Vorlesungs- und Übungsmitschriften, Lösungen der in den Übungsserien gestellten Aufgaben, Lehrbücher.

**Aufgabe 1** ........................................ (6 Punkte)

a) Unter Verwendung der Taylorreihen von $\sin x$ und $\cos x$ stelle man die Potenzreihe (mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$) für die Funktion $f(x) = \sin x - x\cos x$ auf!

b) Mit Hilfe der Reihenentwicklung aus Aufgabe a) berechne man das Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\,dx$$

näherungsweise mit einer Genauigkeit von $10^{-3}$. Wieviel Reihenglieder müssen hierzu berücksichtigt werden?

**Aufgabe 2** ........................................ (7 Punkte)

Die $2\pi$-periodische Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[-\pi, +\pi]$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\pi \le x < 0, \\ \pi - x & \text{für} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, +2\pi]$ !

b) Stellen Sie die Fourierreihe für $f(x)$ auf!

c) In welchen Punkten stimmt die Summe der Fourierreihe <u>nicht</u> mit $f(x)$ überein? Welchen Summenwert besitzt die Fourierreihe dort?

**Aufgabe 3** ........................................ (7 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = x\,\ln(x^2 + y^2)$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ !

b) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene in $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ?

c) Wie groß ist der Anstieg auf der Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $P(1, 0, 0)$ in Richtung des Vektors $(\sqrt{3}, 1)$ ?

d) Begründen Sie, dass der Grenzwert von $f(x, y)$ für $(x, y) \to (0, 0)$ existiert und berechnen Sie diesen!

**Aufgabe 4** ............................................................ (7 Punkte)
Bestimmen Sie alle relativen Extremalstellen der Funktion $f(x, y) = (x^2 - y)\, e^y - x^2$ und geben Sie deren Art an! Besitzt die auf der gesamten $x, y$-Ebene definierte Funktion ein absolutes Maximum und/oder Minimum? (Begründung!)

**Aufgabe 5** ............................................................ (5 Punkte)
Es sei $B$ der Bereich zwischen den Kreislinien $(x-1)^2 + y^2 = 1$ und $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Stellen Sie den Bereich $B$ in den Polarkoordinaten $r, \varphi$ dar und berechnen Sie das Bereichsintegral

$$\iint\limits_B \frac{1}{x^2 + y^2}\, d(x, y) \quad !$$

**Aufgabe 6** ............................................................ (5 Punkte)
Gegeben ist das Kurvenintegral 2. Art

$$\int_C (3x^2 + y + 1)\, dx + (ax + 2y)\, dy,$$

wobei $a$ eine gegebene reelle Zahl ist.

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral für die Gerade $C$ von $A(0, 1)$ nach $B(1, 4)$ !

b) Für welches $a$ ist das Kurvenintegral vom Weg unabhängig (d.h. hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve $C$ ab? Für dieses (diese) $a$ berechne man das zugehörige Potential!

**Aufgabe 7** ............................................................ (7 Punkte)
Man bestimme die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $\quad y' + \dfrac{y}{x} = 2 \ln x + 1,$

b) $\quad y' = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy}$

**Aufgabe 8** ............................................................ (6 Punkte)
Gegeben ist die inhomogene lineare Differentialgleichung $\qquad y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^2 + 1}.$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y'' - 4y' + 4y = 0.$

b) Geben Sie eine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung an!

c) Welche Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung erfüllt die Bedingung $y(0) = y(1) = 0$ ?